Fachabitur 2026 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Teilaufgabe 1.

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Die zweite Ableitungsfunktion von f besitzt die Funktionsgleichung $f''(x) = -0,5 \cdot (x+4)(x-1)$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Skizzieren Sie einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f'', anhand dessen die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f abgelesen werden können. Geben Sie diese Intervalle an.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Die Funktion f' ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f' für $x \to \pm\infty$ sowie jeweils die Art und Lage aller relativen Extremstellen von f' an.

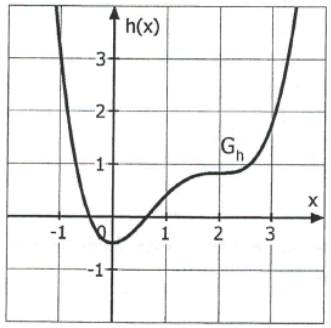
Teilaufgabe 2. (3 BE)

Gegeben ist die quadratische Funktion $q_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2x + k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_{q_k} = \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel auf der x-Achse liegt.

Teilaufgabe 3. (4 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion h vierten Grades. Die Funktion H bezeichne eine Stammfunktion von h.



Setzen Sie jeweils eines der drei mathematischen Symbole „<“, „>“ oder „=“ in das Kästchen ein, sodass eine wahre Aussage entsteht.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Symbol ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

a) $h'(x) \square\ 0$ für $x < 0$

b) $h''(2) \square\ 0$

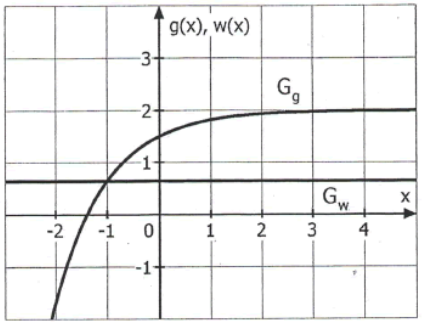
c) $\int_0^2 h(x)\,dx \square\ 0$

d) $H'(2) \square\ 0$

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 4.

Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2$ und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des zugehörigen Graphen G_g sowie den Graphen G_w der konstanten Funktion $w : x \mapsto -0,5 \cdot e + 2$ mit der Definitionsmenge $D_w = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden G_t, die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$ ist.

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes P der beiden Graphen der Funktionen g und w.

Teilaufgabe 4.3 (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $G(x)$ der Stammfunktion von g, deren Graph die y-Achse bei 2 schneidet.

Teilaufgabe 5.

Der Graph G_f der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt im Ursprung einen Terrassenpunkt und den absoluten Tiefpunkt bei $x = 3$. Sonst existieren keine weiteren Punkte mit waagrechter Tangente. Außerdem ist bekannt, dass die Funktionsgleichung die Form $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ hat.

Teilaufgabe 5.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c und d und damit den Funktionsterm $f(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right)$]

Teilaufgabe 5.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f sowie die Koordinaten der Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

Teilaufgabe 5.3 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 5.4 (4 BE)

Berechnen Sie $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx}$. Erklären Sie, welche geometrische Bedeutung das Ergebnis bezüglich G_f hat. Veranschaulichen Sie Ihre Erklärung in der in 5.3 angefertigten Zeichnung.

Teilaufgabe 5.5 (4 BE)

Betrachtet wird nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = f(x) + 7 = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right) + 7$.

Begründen Sie ohne Rechnung, weshalb der Graph der Funktion g keine Nullstelle besitzt. Ermitteln Sie auch $\int_{1}^{3} (g(x) - f(x))\ \mathrm{dx}$.

Teilaufgabe 6. (4 BE)

Die Wertentwicklungen zweier Anlagen A und B werden für $t \in \mathbb{R}_0^+$ durch die folgenden Funktionen beschrieben:

$K_A : t \mapsto 20000 \cdot 1,02^t$ und $K_B : t \mapsto 30000 \cdot 0,98^t$

Dabei steht die Variable t für die Zeit in Jahren ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Die Funktionswerte von K_A bzw. K_B geben jeweils den Anlagewert in Euro zum Zeitpunkt t an.

Berechnen Sie auf eine Nachkommastelle gerundet, nach wie vielen Jahren die beiden Anlagen den gleichen Wert haben.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 7.

In den vergangenen Jahren hatte der Befall von Bäumen durch den Eichenprozessionsspinner in Deutschland zunehmend auch gesundheitliche Auswirkungen auf die Bevölkerung. Aus diesem Grund wird in einem stark betroffenen Gebiet regelmäßig die momentane Anzahl der Patienten, deren Erkrankungen im Zusammenhang mit dem Eichenprozessionsspinner stehen, erfasst.
Anhand dieser Fallzahlen wird die momentane Anzahl der Patienten in einem Jahr mit starkem Befall durch den Eichenprozessionsspinner zwischen Anfang Mai und Ende Juli vereinfacht durch die reelle Funktion $P : t \mapsto 200 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75}$ mit $t \in [0; 12]$ modelliert. Dabei steht die Variable t für die vergangene Zeit in Wochen ab dem 1. Mai ($t_0 = 0$) des betrachteten Jahres. Der Funktionswert von P gibt die momentane Anzahl der Patienten an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 7.1 (2 BE)

Berechnen Sie die nach dem Modell momentane Anzahl der Patienten nach elf Wochen (zum Zeitpunkt $t = 11$).

Teilaufgabe 7.2 (8 BE)

Den erhobenen Fallzahlen ist zu entnehmen, dass im betrachteten Zeitraum die momentane Anzahl der Patienten nach vier Wochen mit ca. 620 ihr absolutes Maximum erreicht hat. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das verwendete Modell diese Daten annähernd widerspiegelt.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{P}(t) = 200 \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75} \cdot (1 - 0,25t)$]

Teilaufgabe 7.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion P im Bereich $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in dem die momentane Anzahl der Patienten nach Erreichen des Maximalwertes erstmals wieder auf 500 gesunken ist.
Wählen Sie für die Zeichnung für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

Teilaufgabe 7.4 (3 BE)

An der Stelle $t_W = 8$ ändert der Graph der Funktion P sein Krümmungsverhalten von einer Rechts- in eine Linkskrümmung. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang. Konkretisieren Sie Ihre Beschreibung mithilfe des Wertes $\dot{P}(8)$.

Lösung

Teilaufgabe 1.

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Die zweite Ableitungsfunktion von f besitzt die Funktionsgleichung $f''(x) = -0,5 \cdot (x + 4)(x - 1)$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Skizzieren Sie einen Ausschnitt des Graphen der Funktion f'', anhand dessen die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f abgelesen werden können. Geben Sie diese Intervalle an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Skizze

$f''(x) = -0,5 \cdot (x + 4)(x - 1)$

Nullstellen und Form des Graphen von f'' bestimmen:

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen, Parabel*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

Der Graph der Funktion f'' ist eine nach unten (wegen $-0,5$) geöffnete Parabel.

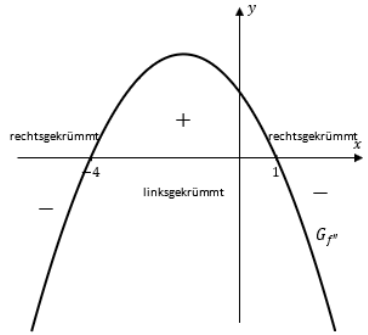
$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 4 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4 \quad ; \quad x_2 = 1$

Der Graph von f'' ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -4$ und

© Abiturloesung.de

$x_2 = 1$.

Skizze:



Krümmungsverhalten einer Funktion

Aus der Skizze wird das Vorzeichen von f'' abgelesen:

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a;b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a;b]$ rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a;b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a;b]$ linksgekrümmt.

$f''(x) > 0$ für $x \in]-4;1[$ $\Rightarrow$ G_f ist linksgekrümmt für $x \in [-4;1]$

$f''(x) < 0$ für $x \in]-\infty;-4[$ und $x \in]1;\infty[$ $\Rightarrow$ G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty;-4]$

und für $x \in [1;\infty[$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Die Funktion f' ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f' für $x \to \pm\infty$ sowie jeweils die Art und Lage aller relativen Extremstellen von f' an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$f''(x) = -0,5 \cdot (x+4)(x-1) = -0,5x^2 - 1,5x + 2$

Die Funktion f' ist eine Stammfunktion von f'':

Erläuterung: *Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $-0,5x^2 - 1,5x + 2$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-0,5x^2 - 1,5x + 2\right) \, \mathrm{dx} = -0,5\frac{x^{2+1}}{2+1} - 1,5\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1}$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-0,5x^2 - 1,5x + 2\right) \, \mathrm{dx} = -\frac{1}{6}x^3 - 0,75x^2 + 2x + C$$

$f'(x) = -\frac{1}{6}x^3 - 0,75x^2 + 2x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$

Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Charakteristischer Verlauf ganzrationaler Funktionen*

Die Funktion f' ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem negativen Leitkoeffizienten $-\frac{1}{6}$. Ihr charakteristischer Verlauf ist „von links oben nach rechts unten“.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$

Art von Extrempunkten ermitteln

Die Extremstellen von f' liegen an den Nullstellen von f'' mit Vorzeichenwechsel (s. Teilaufgabe 1.1):

$x_1 = -4 \quad ; \quad x_2 = 1$

f'' ist die Ableitung von f', Vorzeichenwechsel von f'' aus der Skizze in Teilaufgabe 1.1 bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$x = -4$: Vorzeichenwechsel von f'' von $(-)$ nach $(+)$ $\Rightarrow$ relative Minimumstelle von f'

$x = 1$: Vorzeichenwechsel von f'' von $(+)$ nach $(-)$ $\Rightarrow$ relative Maximumstelle von f'

Teilaufgabe 2. (3 BE)

Gegeben ist die quadratische Funktion $q_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2x + k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_{q_k} = \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel auf der x-Achse liegt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.

Parameterwerte ermitteln

$q_k(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + k$

Liegt der Scheitelpunkt der Parabel auf der x-Achse, so berührt die Parabel die x-Achse. Die Gleichung $q_k(x) = 0$ hat dann genau eine Lösung.

Diskriminante gleich Null setzen:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Diskriminante*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

Der Ausdruck unter der Wurzel heißt Diskriminante D.

$D = b^2 - 4a\,c$

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Die Diskriminante ist negativ: $D < 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung

2. Die Diskriminante ist Null: $D = 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung

3. Die Diskriminante ist positiv: $D > 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen

Ist nach der Anzahl der Lösungen gefragt, dann untersucht man das Vorzeichen der Diskriminante.

$D = (-2)^2 - 4 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot k = 4 - k$

$4 - k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 4$

Alternative Lösung

Im Scheitelpunkt hat die Parabel eine waagrechte Tangente, deshalb erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Waagerechte Tangente*

Die Steigung einer waagerechten Tangente ist gleich Null.

$q_k'(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$

$\dfrac{1}{2}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_S = 4$

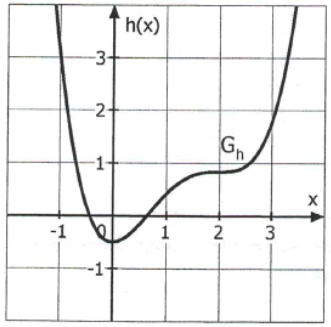
Der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse, also gilt $q_k(4) = 0$:

$q_k(4) = \dfrac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + k = 4 - 8 + k = -4 + k$

$-4 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 4$

Teilaufgabe 3. (4 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion h vierten Grades. Die Funktion H bezeichne eine Stammfunktion von h.



Setzen Sie jeweils eines der drei mathematischen Symbole „<“, „>“ oder „=“ in das Kästchen ein, sodass eine wahre Aussage entsteht.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Symbol ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

© Abiturloesung.de

a) $h'(x) \square 0$ für $x < 0$ b) $h''(2) \square 0$

c) $\int_0^2 h(x)\,\mathrm{dx} \square 0$ d) $H'(2) \square 0$

Lösung zu Teilaufgabe 3.

Graph der Ableitungsfunktion

a) Für $x < 0$ fällt der Graph G_h streng monoton:

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton fallend.

$h'(x) < 0$ für $x < 0$

b) An der Stelle $x = 2$ besitzt G_h einen Terrassenpunkt:

Erläuterung: *Terrassenpunkt/Sattelpunkt*

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Ein Terrassenpunkt an der Stelle x^{TP} liegt vor, wenn gilt:

$f'\left(x^{\mathrm{TP}}\right) = f''\left(x^{\mathrm{TP}}\right) = 0$ und $f'''\left(x^{\mathrm{TP}}\right) \neq 0$

Daraus folgt:

Hat die erste Ableitung $f'(x)$ eine doppelte Nullstelle x^{TP}, so liegt an dieser Stelle ein Terrassenpunkt vor.

$h''(2) = 0$

Geometrische Interpretation eines Integrals

c) Das Integral $\int_0^2 h(x)\,\mathrm{dx}$ gibt die Flächenbilanz zwischen G_h und der x-Achse im Intervall $[0;2]$ an:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Flächenstücke oberhalb der x-Achse gehen mit positivem Vorzeichen, Flächenstücke unterhalb der x-Achse mit negativem Vorzeichen in den Wert des Integrals ein.

Zwischen $x = 0$ und der Nullstelle von h (etwa bei $x = 0,6$) liegt G_h knapp unterhalb der x-Achse. Von dort bis $x = 2$ verläuft G_h deutlich oberhalb der x-Achse. Das Flächenstück oberhalb der x-Achse ist also größer.

$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{dx} > 0$

Graph der Stammfunktion

d) H ist eine Stammfunktion von h, der Wert $h(2)$ wird am Graphen abgelesen:

© Abiturloesung.de

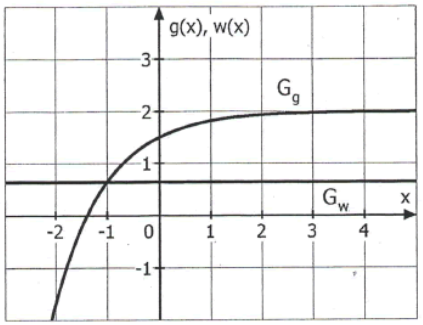
Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$.

$H'(2) = h(2) \approx 0,8 > 0 \quad \Rightarrow \quad H'(2) > 0$

Teilaufgabe 4.

Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2$ und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des zugehörigen Graphen G_g sowie den Graphen G_w der konstanten Funktion $w : x \mapsto -0,5 \cdot e + 2$ mit der Definitionsmenge $D_w = \mathbb{R}$.



Lösung zu Teilaufgabe 4.

Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden G_t, die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Tangentengleichung ermitteln

$g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Hier ist $g(x) = -x$.
Dann ist $g'(x) = -1$.

$g'(x) = -0,5 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 0,5 \cdot e^{-x}$

Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$:

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente am Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

$m = g'(0) = 0,5 \cdot e^0 = 0,5$

$g(0) = -0,5 \cdot e^0 + 2 = 1,5 \quad \Rightarrow \quad$ Berührpunkt $(0|1,5)$

Steigung und Berührpunkt in die Geradengleichung einsetzen:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Geradengleichung*

Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $y = m \cdot x + t$

m gibt die Steigung der Geraden an.
t entspricht dem y-Achsenabschnitt.

$1,5 = 0,5 \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = 1,5$

G_t: $y = 0,5x + 1,5$

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes P der beiden Graphen der Funktionen g und w.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Schnittpunkt zweier Funktionen

Funktionsterme gleichsetzen:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$g(x) = w(x)$

$-0,5 \cdot e^{-x} + 2 = -0,5 \cdot e + 2 \quad | -2 \quad | : (-0,5)$

$e^{-x} = e^1$

Logarithmieren:

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^{-x} = e^1$ angewendet.

$\ln\left(e^{-x}\right) = \ln\left(e^1\right)$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$-x = 1$

$-x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$y = w(-1) = -0,5 \cdot e + 2$

$\Rightarrow \quad P\ (-1| -0,5e + 2)$

Teilaufgabe 4.3 (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $G(x)$ der Stammfunktion von g, deren Graph die y-Achse bei 2 schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe 4.3

Stammfunktion bestimmen

$g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2$

$G(x) = \int g(x)\mathrm{dx}$

$G(x) = \int \left(-0,5 \cdot e^{-x} + 2\right)\ \mathrm{dx}$

$G(x) = 0,5 \cdot \int (-1) \cdot e^{-x}\,\mathrm{dx} + \int 2\,\mathrm{dx}$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $(-1) \cdot e^{-x}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int h'(x) \cdot e^{h(x)} \, \mathrm{dx} = e^{h(x)} + C$$

$$\Rightarrow \quad \int (-1) \cdot e^{-x} \, \mathrm{dx} = e^{-x}$$

Hier ist $h(x) = -x$ und $h'(x) = -1$.

$$\int 2 \, \mathrm{dx} = 2x + C$$

$G(x) = 0,5 \cdot e^{-x} + 2x + C$

Der Graph von G schneidet die y-Achse bei 2, also gilt $G(0) = 2$:

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Graph von G verläuft durch den Punkt $(0|2)$.
Die Punktkoordinaten müssen die Funktionsgleichung erfüllen.

$2 = 0,5 \cdot e^0 + 2 \cdot 0 + C$

$2 = 0,5 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1,5$

$G(x) = 0,5 \cdot e^{-x} + 2x + 1,5$

Teilaufgabe 5.

Der Graph G_f der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt im Ursprung einen Terrassenpunkt und den absoluten Tiefpunkt bei $x = 3$. Sonst existieren keine weiteren Punkte mit waagrechter Tangente. Außerdem ist bekannt, dass die Funktionsgleichung die Form $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe 5.

Teilaufgabe 5.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c und d und damit den Funktionsterm $f(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

Steckbriefaufgaben

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

$f'(x) = x^3 + 3a\,x^2 + 2b\,x + c$

$f''(x) = 3x^2 + 6a\,x + 2b$

Bedingungen aus der Angabe aufstellen:

Erläuterung: *Terrassenpunkt/Sattelpunkt, Gleichungssystem aufstellen*

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Ein Terrassenpunkt an der Stelle x^{TP} liegt vor, wenn gilt:

$f'\left(x^{\mathrm{TP}}\right) = f''\left(x^{\mathrm{TP}}\right) = 0$ und $f'''\left(x^{\mathrm{TP}}\right) \neq 0$

Daraus folgt:

Hat die erste Ableitung $f'(x)$ eine doppele Nullstelle x^{TP}, so liegt an dieser Stelle ein Terrassenpunkt vor.

I: $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$

II: $f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

III: $f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

IV: $f'(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27 + 27a + 6b + c = 0$

$b = 0$ und $c = 0$ in Gleichung IV einsetzen:

$27 + 27a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

© Abiturloesung.de

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right)$$

Teilaufgabe 5.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f sowie die Koordinaten der Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 5.2

Nullstellen einer Funktion

Ansatz: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{4}x^4 - x^3 = 0$$

x^3 ausklammern:

$$\frac{1}{4}x^3 \cdot (x-4) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad$ (dreifache Nullstelle)

$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \quad$ (einfache Nullstelle)

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x-3)$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

$x^2 \cdot (x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = 3$

Zugehörige Funktionswerte:

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ TEP$(0|0)$ (Terrassenpunkt laut Angabe)

$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 81 - 27 = -6,75 \quad \Rightarrow \quad$ TIP$(3|-6,75)$ (Tiefpunkt laut Angabe)

Teilaufgabe 5.3 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Lösung zu Teilaufgabe 5.3

Skizze

Bisherige Ergebnisse:

Nullstellen: $(0|0) \quad ; \quad (4|0)$ (s. Teilaufgabe 5.2)

Terrassenpunkt: $(0|0)$ (s. Teilaufgabe 5.2)

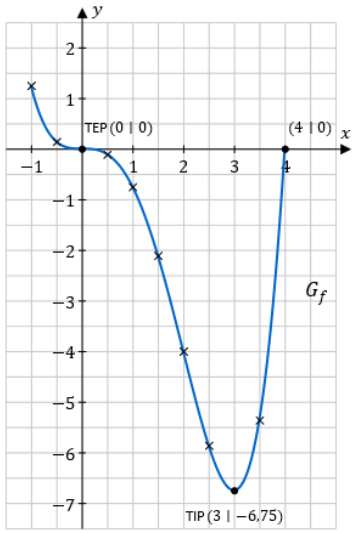
Tiefpunkt: $(3|-6,75)$ (s. Teilaufgabe 5.2)

Wertetabelle:

x	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$1,25$	$0,14$	0	$-0,11$	$-0,75$	$-2,11$	-4	$-5,86$	$-6,75$	$-5,36$	0

© Abiturloesung.de

Zeichnung:



Teilaufgabe 5.4 (4 BE)

Berechnen Sie $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx}$. Erklären Sie, welche geometrische Bedeutung das Ergebnis bezüglich G_f hat. Veranschaulichen Sie Ihre Erklärung in der in 5.3 angefertigten Zeichnung.

Lösung zu Teilaufgabe 5.4

Bestimmtes Integral

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{4} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right)\,\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{4}x^4 - x^3$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r\,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{4}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx} = \left(\frac{1024}{20} - \frac{256}{4}\right) - \left(\frac{-1}{20} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= (51{,}2 - 64) - (-0{,}05 - 0{,}25) = -12{,}8 + 0{,}3 = -12{,}5$$

Geometrische Interpretation eines Integrals

Flächenbilanz:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

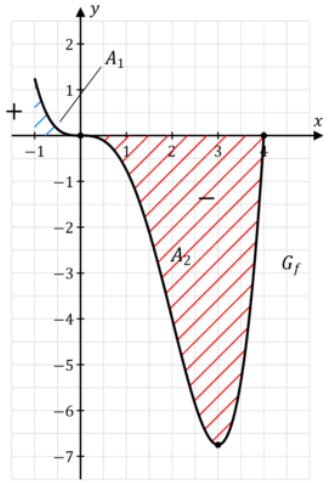
Das Integral gibt die Flächenbilanz zwischen G_f und der x-Achse an. Flächenstücke oberhalb der x-Achse gehen positiv, Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ in den Wert ein.

Im Intervall $[-1;0]$ verläuft G_f oberhalb, im Intervall $[0;4]$ unterhalb der x-Achse (s. Teilaufgabe 5.3).

© Abiturloesung.de

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx} = A_1 - A_2 = -12,5$$

Der Wert $-12,5$ bedeutet: Das Flächenstück, das G_f im Intervall $[0;4]$ mit der x-Achse unterhalb der x-Achse einschließt, ist um $12,5$ FE größer als das Flächenstück oberhalb der x-Achse im Intervall $[-1;0]$.



Teilaufgabe 5.5 (4 BE)

Betrachtet wird nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = f(x) + 7 = \frac{1}{4}\left(x^4 - 4x^3\right) + 7$.

Begründen Sie ohne Rechnung, weshalb der Graph der Funktion g keine Nullstelle besitzt.

Ermitteln Sie auch $\int_{1}^{3} (g(x) - f(x))\ \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe 5.5

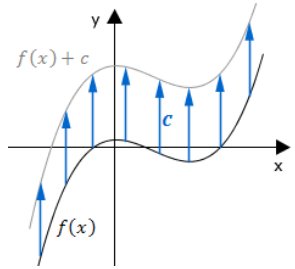
Verschiebung von Funktionsgraphen

$g(x) = f(x) + 7$

Der Graph G_g entsteht aus G_f durch Verschiebung:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Ändert man den Funktionsterm einer Funktion f von $f(x)$ auf $f(x) + c$, so ändert sich nicht das Aussehen ihres Graphen, jedoch seine Lage im Koordinatensystem. Der Graph wird um den Wert c nach oben (Richtung positiver y-Achse) verschoben.



G_g ist der um 7 Einheiten nach oben verschobene Graph G_f.

Der absolute Tiefpunkt $(3|-6,75)$ von G_f (s. Teilaufgabe 5.2) wird zum absoluten Tiefpunkt $(3|0,25)$ von G_g.

Da der tiefste Punkt von G_g oberhalb der x-Achse liegt, gilt $g(x) \geq 0,25 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ g hat keine Nullstelle.

Bestimmtes Integral

$$\int_{1}^{3} (g(x) - f(x))\ \mathrm{dx} = \int_{1}^{3} 7\ \mathrm{dx}$$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Stammfunktion einer Potenzfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von 7 (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \qquad \int 7 \,\mathrm{dx} = \int 7 \cdot x^0 \,\mathrm{dx} = 7 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = 7x + C$$

$$\int_1^3 7 \,\mathrm{dx} = [7x]_1^3$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^3 7 \,\mathrm{dx} = 7 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 21 - 7 = 14$$

Teilaufgabe 6. (4 BE)

Die Wertentwicklungen zweier Anlagen A und B werden für $t \in \mathbb{R}_0^+$ durch die folgenden Funktionen beschrieben:

$K_A : t \mapsto 20000 \cdot 1,02^t$ und $K_B : t \mapsto 30000 \cdot 0,98^t$

Dabei steht die Variable t für die Zeit in Jahren ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Die Funktionswerte von K_A bzw. K_B geben jeweils den Anlagewert in Euro zum Zeitpunkt t an.

Berechnen Sie auf eine Nachkommastelle gerundet, nach wie vielen Jahren die beiden Anlagen den gleichen Wert haben.

Lösung zu Teilaufgabe 6.

Exponentialgleichung

Ansatz: $K_A(t) = K_B(t)$

$20000 \cdot 1,02^t = 30000 \cdot 0,98^t \quad | : 20000 \quad | : 0,98^t$

$$\frac{1,02^t}{0,98^t} = 1,5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{1,02}{0,98}\right)^t = 1,5$$

Logarithmieren:

Erläuterung: *Logarithmieren, Logarithmus einer Potenz*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $\left(\frac{1,02}{0,98}\right)^t = 1,5$ angewendet.

$$\ln\left(\frac{1,02}{0,98}\right)^t = \ln 1,5$$

Dritte Logarithmusregel: $\ln\left(s^t\right) = t \cdot \ln s$

$$t \cdot \ln\left(\frac{1,02}{0,98}\right) = \ln 1,5$$

$$t = \frac{\ln 1,5}{\ln\left(\frac{1,02}{0,98}\right)} \approx 10,1$$

$\Rightarrow$ Nach etwa 10,1 Jahren haben beide Anlagen den gleichen Wert.

Teilaufgabe 7.

In den vergangenen Jahren hatte der Befall von Bäumen durch den Eichenprozessionsspinner in Deutschland zunehmend auch gesundheitliche Auswirkungen auf die Bevölkerung. Aus diesem Grund wird in einem stark betroffenen Gebiet regelmäßig die momentane Anzahl der Patienten, deren Erkrankungen im Zusammenhang mit dem Eichenprozessionsspinner stehen, erfasst.
Anhand dieser Fallzahlen wird die momentane Anzahl der Patienten in einem Jahr mit starkem Befall durch den Eichenprozessionsspinner zwischen Anfang Mai und Ende Juli vereinfacht durch die reelle Funktion $P : t \mapsto 200 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75}$ mit $t \in [0; 12]$ modelliert. Dabei steht die Variable t für die vergangene Zeit in Wochen ab dem 1. Mai ($t_0 = 0$) des betrachteten Jahres. Der Funktionswert von P gibt die momentane Anzahl der Patienten an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie

© Abiturloesung.de

Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Lösung zu Teilaufgabe 7.

Teilaufgabe 7.1 (2 BE)

Berechnen Sie die nach dem Modell momentane Anzahl der Patienten nach elf Wochen (zum Zeitpunkt $t = 11$).

Lösung zu Teilaufgabe 7.1

Funktionswert berechnen

$P(11) = 200 \cdot 11 \cdot e^{-0,25 \cdot 11 + 0,75} = 2200 \cdot e^{-2} \approx 297,7$

$\Rightarrow$ Nach elf Wochen gibt es nach dem Modell ca. 298 Patienten.

Teilaufgabe 7.2 (8 BE)

Den erhobenen Fallzahlen ist zu entnehmen, dass im betrachteten Zeitraum die momentane Anzahl der Patienten nach vier Wochen mit ca. 620 ihr absolutes Maximum erreicht hat. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das verwendete Modell diese Daten annähernd widerspiegelt.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{P}(t) = 200 \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75} \cdot (1 - 0,25t)$]

Lösung zu Teilaufgabe 7.2

Extremwertaufgabe

$P(t) = 200t \cdot e^{-0,25t+0,75}$; $D_P = [0; 12]$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(t) = 200t$ und $v(t) = e^{-0,25t+0,75}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Dann ist $u'(t) = 200$ und $v'(t) = e^{-0,25t+0,75} \cdot (-0,25)$.

$\dot{P}(t) = 200 \cdot e^{-0,25t+0,75} + 200t \cdot e^{-0,25t+0,75} \cdot (-0,25)$

$\dot{P}(t) = 200 \cdot e^{-0,25t+0,75} \cdot (1 - 0,25t)$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$200 \cdot \underbrace{e^{-0,25t+0,75}}_{>0} \cdot (1 - 0,25t) = 0$

$1 - 0,25t = 0 \quad \Rightarrow \quad t^E = 4$

Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung bestimmen (der Faktor $200 \cdot e^{-0,25t+0,75}$ ist stets positiv, das Vorzeichen hängt nur von $1 - 0,25t$ ab):

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$\dot{P}(t) > 0$ für $t \in [0;4[$; $\dot{P}(t) < 0$ für $t \in]4;12]$

$\Rightarrow$ rel. Maximum bei $t = 4$

$P(4) = 800 \cdot e^{-0{,}25} \approx 623$

Randbetrachtung:

Erläuterung: *Randbetrachtung*

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

$\left.\begin{array}{rcl} P(0) & = & 0 \\ P(12) & = & 2400 \cdot e^{-2{,}25} \approx 253 \end{array}\right\}$ beide kleiner als $P(4) \approx 623$ $\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $t = 4$

$\Rightarrow$ Nach dem Modell wird das absolute Maximum ebenfalls nach vier Wochen erreicht, mit ca. 623 Patienten. Der Zeitpunkt stimmt genau, die Patientenzahl annähernd mit den erhobenen Daten (ca. 620) überein. Das Modell spiegelt die Daten also annähernd wider.

Teilaufgabe 7.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion P im Bereich $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in dem die momentane Anzahl der Patienten nach Erreichen des Maximalwertes erstmals wieder auf 500 gesunken ist.
Wählen Sie für die Zeichnung für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

Lösung zu Teilaufgabe 7.3

Skizze

Bisherige Ergebnisse:

$P(11) \approx 298$ (s. Teilaufgabe 7.1)

Hochpunkt: (4|623) (s. Teilaufgabe 7.2)

Randwerte: (0|0) ; (12|253) (s. Teilaufgabe 7.2)

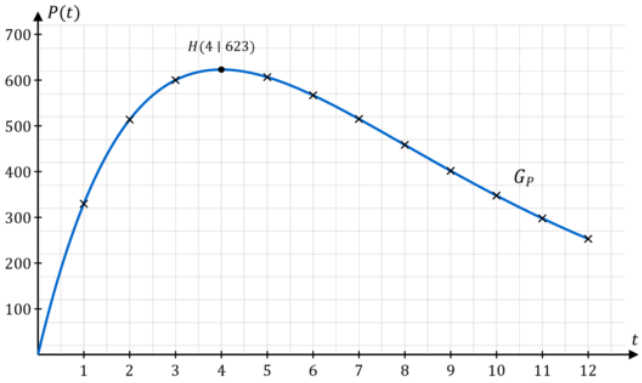
Wertetabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6
$P(t)$	0	330	514	600	623	607	567

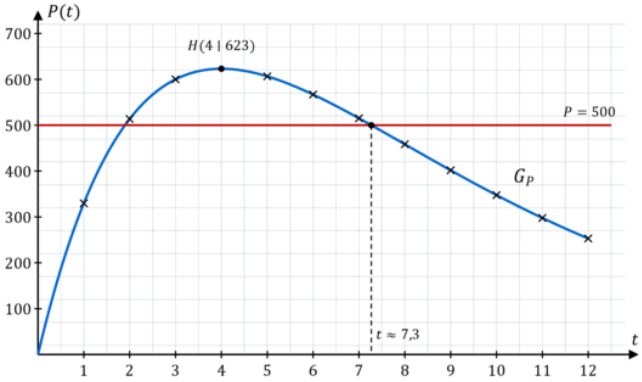
t	7	8	9	10	11	12
$P(t)$	515	458	402	348	298	253

Zeichnung:

© Abiturloesung.de



Werte am Graphen ablesen



Abgelesen: $t \approx 7,3$

Erläuterung: *Funktionswerte ablesen*

Nach dem Maximum bei $t = 4$ fällt der Graph. Der zweite Schnittpunkt mit der Geraden $P = 500$ gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Anzahl erstmals wieder auf 500 gesunken ist.

Der Mai hat 31 Tage, das sind $\frac{31}{7} \approx 4,4$ Wochen. Ende Juni sind $\frac{61}{7} \approx 8,7$ Wochen vergangen.

$4,4 < 7,3 < 8,7$ $\Rightarrow$ Die momentane Anzahl der Patienten sinkt im Juni erstmals wieder auf 500.

Teilaufgabe 7.4 (3 BE)

An der Stelle $t_W = 8$ ändert der Graph der Funktion P sein Krümmungsverhalten von einer Rechts- in eine Linkskrümmung. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang. Konkretisieren Sie Ihre Beschreibung mithilfe des Wertes $\dot{P}(8)$.

Lösung zu Teilaufgabe 7.4

Interpretation

An der Stelle $t_W = 8$ wechselt G_P von einer Rechts- in eine Linkskrümmung:

Erläuterung: *Momentane Änderungsrate, Wendepunkt*

$\dot{P}(t)$ ist die momentane Änderungsrate der Patientenzahl, also die Zu- bzw. Abnahme in Patienten pro Woche.

Ist G_P rechtsgekrümmt, so wird $\dot{P}$ kleiner. Ist G_P linksgekrümmt, so wird $\dot{P}$ größer. Beim Wechsel von Rechts- zu Linkskrümmung nimmt $\dot{P}$ also seinen kleinsten Wert an.

Da G_P nach dem Maximum bei $t = 4$ fällt, ist $\dot{P}(8)$ negativ.

$\dot{P}(8) = 200 \cdot e^{-0,25 \cdot 8 + 0,75} \cdot (1 - 0,25 \cdot 8) = -200 \cdot e^{-1,25} \approx -57,3$

$\Rightarrow$ Nach acht Wochen nimmt die momentane Anzahl der Patienten am stärksten ab, und

© Abiturloesung.de

zwar um ca. 57 Patienten pro Woche.