# Abitur 2025 Mathematik Stochastik IV

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

**Teilaufgabe Teil A a** (2 BE)

Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße $X$ gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ gilt.

**Teilaufgabe Teil A b** (3 BE)

Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist $2, 3$ oder 5“ .

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 15 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

Für eine Stichprobe werden 50 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

**Teilaufgabe Teil B 1a** (1 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau fünf Radausflügler befinden.

**Teilaufgabe Teil B 1b** (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.

Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

**Teilaufgabe Teil B 2a** (3 BE)

Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.





**Teilaufgabe Teil B 2b** (3 BE)

Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 15 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 15 %.“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiterzubetreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

**Teilaufgabe Teil B 2c** (5 BE)

Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

**Teilaufgabe Teil B 2d** (5 BE)

Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 100 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 20 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 30 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.

Hinweis: Die unten abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene Tafelwerk.

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$

| n | k | p = 0,22 | p = 0,23 | p = 0,24 | p = 0,25 | p = 0,26 | p = 0,27 | p = 0,28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | 15 | 0,05379 | 0,03292 | 0,01944 | 0,01108 | 0,00611 | 0,00325 | 0,00168 |
| | 16 | 0,08876 | 0,05701 | 0,03531 | 0,02111 | 0,01219 | 0,00680 | 0,00367 |
| | 17 | 0,13750 | 0,09257 | 0,06008 | 0,03763 | 0,02275 | 0,01329 | 0,00750 |
| | 18 | 0,20089 | 0,14155 | 0,09616 | 0,06301 | 0,03985 | 0,02434 | 0,01437 |
| | 19 | 0,27805 | 0,20468 | 0,14532 | 0,09953 | 0,06579 | 0,04199 | 0,02589 |
| | 20 | 0,36619 | 0,28106 | 0,20819 | 0,14883 | 0,10270 | 0,06843 | 0,04404 |
| | 21 | 0,46089 | 0,36797 | 0,28382 | 0,21144 | 0,15211 | 0,10569 | 0,07093 |
| | 22 | 0,55681 | 0,46119 | 0,36959 | 0,28637 | 0,21444 | 0,15516 | 0,10849 |
| | 23 | 0,64856 | 0,55562 | 0,46145 | 0,37108 | 0,28871 | 0,21723 | 0,15801 |
| | 24 | 0,73158 | 0,64612 | 0,55451 | 0,46167 | 0,37244 | 0,29087 | 0,21980 |
| | 25 | 0,80277 | 0,72830 | 0,64385 | 0,55347 | 0,46186 | 0,37368 | 0,29286 |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |





## Lösung

**Teilaufgabe Teil A a** (2 BE)

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße $X$ gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ gilt.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil A a**

***Wahrscheinlichkeitsverteilung***

Mögliche Kombinationen für das Produkt 10:
$(5,2); (2,5)$

Mögliche Kombinationen für das Produkt 15:
$(3,5); (5,3)$

Wahrscheinlichkeit für jede beliebige Kombination:
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow$Somit sind die betrachteten Wahrscheinlichkeiten gleich groß

**Teilaufgabe Teil A b** (3 BE)

Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5“ .

**Lösung zu Teilaufgabe Teil A b**

***Wahrscheinlichkeit***

Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der $n$ erzielten Zahlen 2, 3 bzw. 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also

$$3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Erläuterung:

3: Anzahl an Möglichkeiten einer der Zahlen $2, 3$ oder $5$ zu erzielen.

$n$: Anzahl an Plätzen bei $n$ Versuchen eine der gewünschten Zahlen anzuordnen.

$\frac{1}{6}$: Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen $2, 3$ oder $5$ zu erzielen.

$\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$: Wahrscheinlichkeit nur noch $n-1$ Einser zu erzielen.

**Teilaufgabe Teil B 1a** (1 BE)

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 15 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

Für eine Stichprobe werden 50 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau fünf Radausflügler befinden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

***Binomialverteilung***

$P^{50}_{0,15}(X = 5) \overset{\text{TW}}{=} 0,10725 \approx 0,11$

**Teilaufgabe Teil B 1b** (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

***Erwartungswert einer Zufallsgröße***





$\mu = 50 \cdot 0,15 = 7,5$

$7,5 \cdot 0,1 = 0,75$

$P^{50}_{0,15}(X > 7,5 + 0,75) = P^{50}_{0,15}(X > 8,25) = P^{50}_{0,15}(X \geq 9) = 1 - P^{50}_{0,15} \leq 8) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,66810 \approx 0,33$

Erläuterung:

Mehr als $k-$Treffer:

$P^n_p(X > k) = 1 - P^n_p(x \leq k)$

**Teilaufgabe Teil B 2a** (3 BE)

Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

***Baumdiagramm erstellen***

Ereignisse definieren:

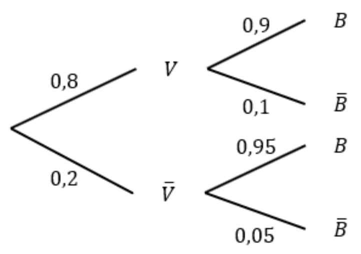
$V$ =„Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht.“
$B$ =„Die Fahrkarte wird benutzt

Wahrscheinlichkeiten auslesen:

$P(V) = 0,8$
$P_V(B) = 0,9$
$P_{\overline{V}}(B) = 0,95$

Erläuterung: *Baumdiagramm der bedingten Wahrscheinlichkeiten*

Das Baumdiagramm sollte zunächst immer mit den Ereignissen der Bedingung beginnen also hier $V$ und $\overline{V}$.




**Teilaufgabe Teil B 2b** (3 BE)

Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b**

***Bedingte Wahrscheinlichkeit***

$$P_{\overline{B}}(V) = \frac{P(\overline{B} \cap V)}{P(\overline{B})} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{P(\overline{B})} = \frac{0,08}{P(\overline{B})}$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{V}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{V})}{P(\overline{B})} = \frac{0,2 \cdot 0,05}{P(\overline{B})} = \frac{0,01}{P(\overline{B})}$$

$\Rightarrow$ Die Aussage ist richtig.





Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ wird wie folgt bestimmt:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Teilaufgabe Teil B 2c** (5 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 15 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 15 %.“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiterzubetreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c**

***Hypothesentest - Entscheidungsregel***

Text analysieren und Daten herauslesen:

Erläuterung:

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,15$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 8\%$

Annahmebereich von $H_0$: $A = [0; k]$

Ablehnungsbereich von $H_0$: $\overline{A} = [k+1, 200]$

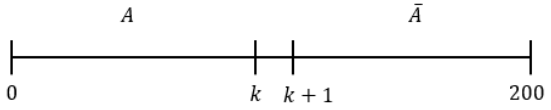
Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,15$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 8\%$

Annahmebereich von $H_0$: $A = [0; k]$

Ablehnungsbereich von $H_0$: $\overline{A} = [k+1, 200]$




Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall, wenn $H_0$ wahr ist, man sich aber gegen $H_0$ entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ( $Z \geq k+1$ ).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,05}^{200}(Z \geq k+1) \leq 0,08$

$P_{0,15}^{200}(Z \geq k+1) \leq 0,08$

$1 - P_{0,15}^{200}(Z \leq k) \leq 0,08$

$-P_{0,15}^{200}(Z \leq k) \leq -0,92$

$P_{0,15}^{200}(Z \leq k) \geq 0,92$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \geq 37$

$\Rightarrow$ Annahmebereich $A = \{0; ...; 37\}$
$\Rightarrow$ Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{38; ...; 200\}$





**Teilaufgabe Teil B 2d** (5 BE)

Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 100 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 20 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 30 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.

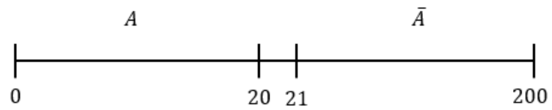
Hinweis: Die unten abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene Tafelwerk.

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$

| n | k | p = 0,22 | p = 0,23 | p = 0,24 | p = 0,25 | p = 0,26 | p = 0,27 | p = 0,28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | 15 | 0,05379 | 0,03292 | 0,01944 | 0,01108 | 0,00611 | 0,00325 | 0,00168 |
| | 16 | 0,08876 | 0,05701 | 0,03531 | 0,02111 | 0,01219 | 0,00680 | 0,00367 |
| | 17 | 0,13750 | 0,09257 | 0,06008 | 0,03763 | 0,02275 | 0,01329 | 0,00750 |
| | 18 | 0,20089 | 0,14155 | 0,09616 | 0,06301 | 0,03985 | 0,02434 | 0,01437 |
| | 19 | 0,27805 | 0,20468 | 0,14532 | 0,09953 | 0,06579 | 0,04199 | 0,02589 |
| | 20 | 0,36619 | 0,28106 | 0,20819 | 0,14883 | 0,10270 | 0,06843 | 0,04404 |
| | 21 | 0,46089 | 0,36797 | 0,28382 | 0,21144 | 0,15211 | 0,10569 | 0,07093 |
| | 22 | 0,55681 | 0,46119 | 0,36959 | 0,28637 | 0,21444 | 0,15516 | 0,10849 |
| | 23 | 0,64856 | 0,55562 | 0,46145 | 0,37108 | 0,28871 | 0,21723 | 0,15801 |
| | 24 | 0,73158 | 0,64612 | 0,55451 | 0,46167 | 0,37244 | 0,29087 | 0,21980 |
| | 25 | 0,80277 | 0,72830 | 0,64385 | 0,55347 | 0,46186 | 0,37368 | 0,29286 |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d**

***Hypothesentest - Fehler zweiter Art***



Die Wahrscheinlichkeit im Annahmebereich mit der neuen Wahrscheinlichkeit zu landen, muss folgende Bedingung erfüllen:

$P_p^{200}(X \leq 20) \leq 0,3$

Durch auslesen ergibt sich:

$P_{0,22}^{200}(X \leq 20) = 0,36619$
$P_{0,23}^{200}(X \leq 20) = 0,28106$

$\Rightarrow$ der tatsächliche Anteil der Radausflügler müsste mindestens 23% betragen.

Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über 15% gestiegen ist, entscheidet man sich aufgrund des Testergebnisses dafür, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.