Abitur 2025 Mathematik Stochastik III

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ gilt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist $2, 3$ oder 5“ .

Eine traditionsreiche Kleinkunstbühne bietet verschiedene Veranstaltungen an.

An einem Kabarettabend sind 200 Gäste anwesend.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

In der Pause bestellen erfahrungsgemäß 65 % der Gäste einen Brotzeitteller. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der bestellten Brotzeitteller durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Es werden genau 130 Brotzeitteller bestellt.“
B: „Es werden mehr als 140 Brotzeitteller bestellt.“

40 der 200 Gäste sind Inhaber eines Abonnements. Unter allen Gästen werden fünf signierte Bücher des auftretenden Kabarettisten verlost, wobei jeder Gast höchstens ein Buch gewinnen kann.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Betrachtet wird das Ereignis E: „Genau zwei Inhaber eines Abonnements gewinnen ein signiertes Buch.“

Es gilt: $P(E) = \frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{160}{3}}{\binom{200}{5}}$

Geben Sie $P(E)$ in Prozent an. Übertragen Sie das beschriebene Zufallsexperiment der Verlosung und das Ereignis E in ein passendes Urnenmodell.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Inhaber eines Abonnements unter den Gewinnern sind.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Die fünf Bücher werden nacheinander verlost. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\frac{40}{200} \cdot \frac{160}{199} \cdot \frac{39}{198} \cdot \frac{159}{197} \cdot \frac{158}{196}$ berechnet werden kann.

Die Karten für die Veranstaltungen der Kleinkunstbühne können entweder im Verkaufsbüro oder im Internet erworben werden. 90 % der Kartenkäufe im Internet und 35 % der Kartenkäufe im Verkaufsbüro werden von Personen getätigt, die jünger als 60 Jahre sind. Insgesamt werden 54 % der Kartenkäufe von Personen getätigt, die mindestens 60 Jahre alt sind. Ein Kartenkauf wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
J: „Der Kauf wurde von einer Person getätigt, die jünger als 60 Jahre ist.“
V: „Der Kauf wurde im Verkaufsbüro getätigt.“

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang das Ereignis $\overline{J} \cap \overline{V}$.

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Ermitteln Sie, z. B. mithilfe eines Baumdiagramms, die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kauf im Internet getätigt wurde.

(zur Kontrolle: $p = 0,2$)

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Berechnen Sie für den Fall, dass der Kauf von einer Person getätigt wurde, die jünger als 60 Jahre ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kauf im Verkaufsbüro getätigt wurde.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Mögliche Kombinationen für das Produkt 10:
$(5, 2); (2, 5)$

Mögliche Kombinationen für das Produkt 15:
$(3, 5); (5, 3)$

Wahrscheinlichkeit für jede beliebige Kombination:
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow$Somit sind die betrachteten Wahrscheinlichkeiten gleich groß

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5“ .

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Wahrscheinlichkeit

Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 bzw. 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also

$$3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Erläuterung:

3: Anzahl an Möglichkeiten einer der Zahlen 2, 3 oder 5 zu erzielen.

n: Anzahl an Plätzen bei n Versuchen eine der gewünschten Zahlen anzuordnen.

$\frac{1}{6}$: Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen 2, 3 oder 5 zu erzielen.

$\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$: Wahrscheinlichkeit nur noch $n-1$ Einser zu erzielen.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Eine traditionsreiche Kleinkunstbühne bietet verschiedene Veranstaltungen an.

An einem Kabarettabend sind 200 Gäste anwesend.

In der Pause bestellen erfahrungsgemäß 65 % der Gäste einen Brotzeitteller. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der bestellten Brotzeitteller durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Es werden genau 130 Brotzeitteller bestellt.“
B: „Es werden mehr als 140 Brotzeitteller bestellt.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Binomialverteilung

$$P_{0,65}^{200}(X = 130) \overset{\text{TW}}{=} 0,05906 \approx 0,059$$

$$P_{0,65}^{200}(X > 140) = 1 - P_{0,65}^{200} \leq 140) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,94163 \approx 0,058$$

Erläuterung:

Mehr als $k-$Treffer:

$P_p^n(X > k) = 1 - P_p^n(X \leq k)$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

40 der 200 Gäste sind Inhaber eines Abonnements. Unter allen Gästen werden fünf signierte Bücher des auftretenden Kabarettisten verlost, wobei jeder Gast höchstens ein Buch gewinnen kann.

Betrachtet wird das Ereignis E: „Genau zwei Inhaber eines Abonnements gewinnen ein signiertes Buch.“

Es gilt: $P(E) = \frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{160}{3}}{\binom{200}{5}}$

Geben Sie $P(E)$ in Prozent an. Übertragen Sie das beschriebene Zufallsexperiment der Verlosung und das Ereignis E in ein passendes Urnenmodell.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

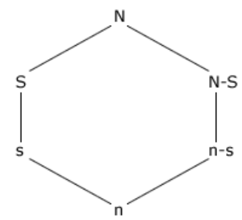
Ziehen ohne Zurücklegen

$P(E) \approx 20{,}6\ \%$

Aus einer Urne mit 200 Kugeln, von denen 40 schwarz sind, werden fünf Kugeln, ohne Zurücklegen gezogen.

E :„Genau zwei Kugeln sind schwarz“

Erläuterung: *Ziehen ohne Zurücklegen*



Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Betrachtung der Reihenfolge, mit einem Griff gezogen. Dabei gibt s die Anzahl der schwarzen gezogen Kugeln an.

Die Wabe einfügen

$$\frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Inhaber eines Abonnements unter den Gewinnern sind.

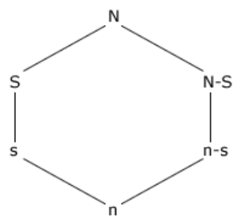
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Ziehen ohne Zurücklegen

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

$$1 - \frac{\binom{40}{0} \cdot \binom{160}{5}}{\binom{200}{5}} - \frac{\binom{40}{1} \cdot \binom{160}{4}}{\binom{200}{5}} \approx 0{,}262$$

Erläuterung: *Ziehen ohne Zurücklegen*



Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Betrachtung der Reihenfolge, mit einem Griff gezogen. Dabei gibt s die Anzahl der schwarzen gezogen Kugeln an.

Die Wabe einfügen

$$\frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Die fünf Bücher werden nacheinander verlost. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\frac{40}{200} \cdot \frac{160}{199} \cdot \frac{39}{198} \cdot \frac{159}{197} \cdot \frac{158}{196}$ berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen

Nur die Gewinner des ersten und dritten Buchs sind Abonnenten.

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen*

Die Reihenfolge spielt eine Rolle, da man genau zuordnen kann, wann ein Abonnent etwas zieht.
Die Ziehung ist ohne Zurücklegen, da eine einmal ausgewählte Person nicht noch einmal gewinnen kann.

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Die Karten für die Veranstaltungen der Kleinkunstbühne können entweder im Verkaufsbüro oder im Internet erworben werden. 90 % der Kartenkäufe im Internet und 35 % der Kartenkäufe im Verkaufsbüro werden von Personen getätigt, die jünger als 60 Jahre sind. Insgesamt werden 54 % der Kartenkäufe von Personen getätigt, die mindestens 60 Jahre alt sind. Ein Kartenkauf wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
J: „Der Kauf wurde von einer Person getätigt, die jünger als 60 Jahre ist.“
V: „Der Kauf wurde im Verkaufsbüro getätigt.“

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang das Ereignis $\overline{J} \cap \overline{V}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Wahrscheinlichkeit

Der Kauf wurde von einer Person, die mindestens 60 Jahre alt ist, im Internet getätigt.

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Ermitteln Sie, z. B. mithilfe eines Baumdiagramms, die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kauf im Internet getätigt wurde.

(zur Kontrolle: $p = 0,2$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

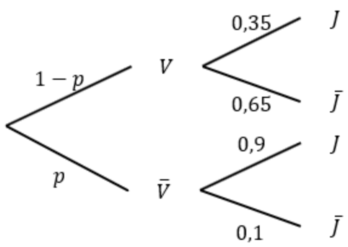
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten auslesen:

$P_{\overline{V}}(J) = 0,9$
$P_V(J) = 0,35$
$P(\overline{J}) = 0,54$

Erläuterung: *Baumdiagramm der bedingten Wahrscheinlichkeiten*

Das Baumdiagramm sollte zunächst immer mit den Ereignissen der Bedingung beginnen also hier V und $\overline{V}$.



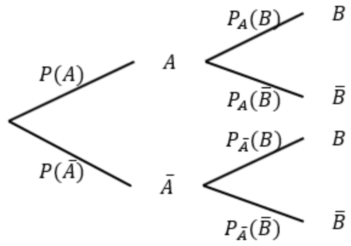
$p \cdot 0,1 + (1-p) \cdot 0,65 = 0,54$

$0,1p + 0,65 - 0,65p = 0,54$

$-0,55p = -0,11$

$\Rightarrow p = 0,2$

Erläuterung: *2. Pfadregel*



$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Berechnen Sie für den Fall, dass der Kauf von einer Person getätigt wurde, die jünger als 60 Jahre ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kauf im Verkaufsbüro getätigt wurde.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_J(V) = \frac{(1-0,2) \cdot 0,35}{1-0,54} \approx 0,609$$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ wird wie folgt bestimmt:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$