Abitur 2025 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Es gibt genau eine positive reelle Zahl a, für die das Integral $\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{dx}$ den Wert 0 hat.

Berechnen Sie a.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion g.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Beschreiben Sie, wie man rechnerisch nachweisen kann, dass 2 eine Wendestelle von g ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Der Punkt $(2|3)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen von g. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h ist gegeben durch $h(x) = g(2x) - 1$.
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von h an und begründen Sie Ihre Angabe.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Für die zweite Ableitungsfunktion von f gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Einer der Graphen I und II in Abbildung 1 ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie ihre Angabe.

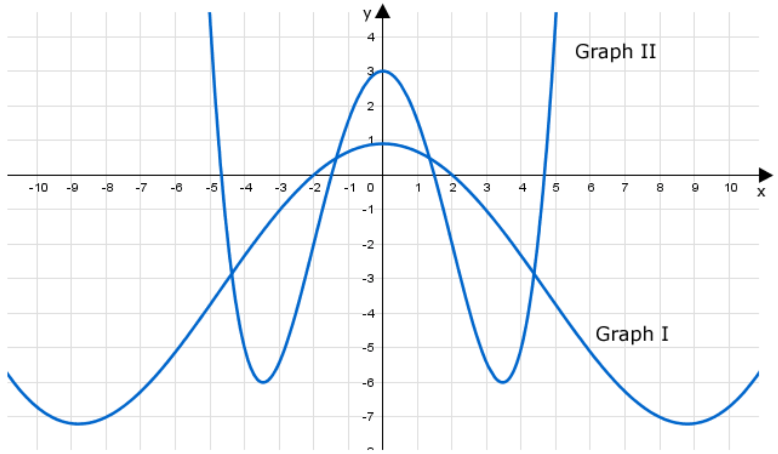


Abb. 1

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x-2}$ mit $x \in [2; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G von g sowie den Punkt $P(3|1)$. Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist die Tangente an G im Punkt P und hat mit G nur Punkt P gemeinsam.

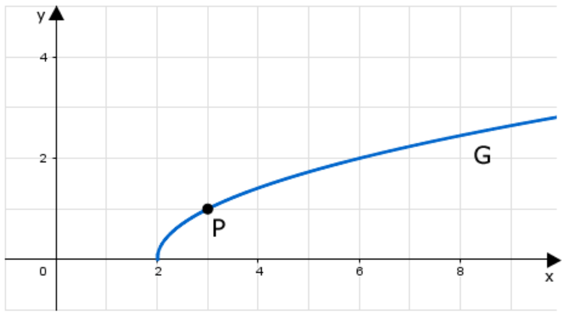


Abb.2

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Zeichnen Sie die Tangente in Abbildung 2 ein.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird eine Gerade, die mit G sowohl den Punkt P als auch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Geben Sie alle möglichen Steigungen dieser Gerade an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 5x \cdot e^{-x}$. Abbildung 3 zeigt den Graphen G von f.

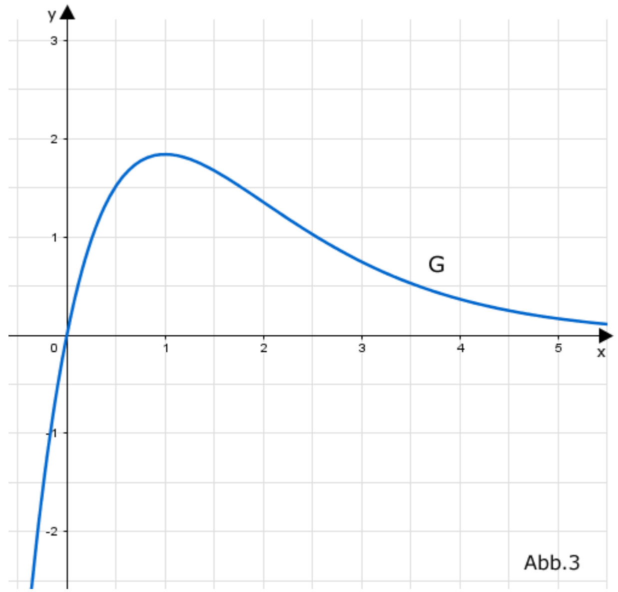


Abb.3

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

G hat genau einen Extrempunkt. Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts von G.
(zur Kontrolle: $\left(1|\frac{5}{e}\right)$)

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Die Tangente t an G in dessen Wendepunkt hat die Gleichung $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Gerade, die den Extrempunkt von G enthält und senkrecht zu t verläuft.

Betrachtet wird die in $[1; +\infty[$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x)$.

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar, die Funktion h jedoch umkehrbar ist. Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Umkehrfunktion von h an.

Abbildung 4 zeigt eine Figur, die modellhaft das Wappen eines Sportvereins beschreibt. Die Begrenzungslinien der Figur werden durch einen Teil der Gerade mit der Gleichung $y = 5$ sowie durch die Kurvenstücke H_1 und H_2 beschrieben:

- H_1 entsteht, indem G für $x \in [\ln 5; 5]$an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt wird.
- H_2 entsteht durch Spiegeln von H_1 an der Gerade mit der Gleichung $x = \ln 5$.

Der Punkt $S(\ln 5|\ln 5)$ ist gemeinsamer Punkt von H_1 und H_2.

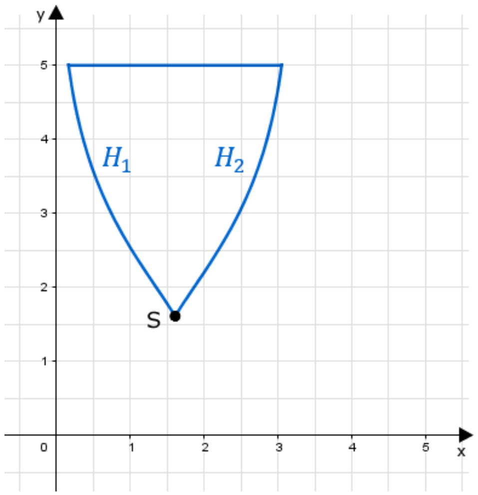


Abb. 4

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Begründen Sie, dass mit dem Term $2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int\limits_{\ln 5}^{5} f(x)\ \mathrm{dx} \right)$ der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto -5(x+1) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f. Berechnen Sie mit dem Term aus Aufgabe 1d den Flächeninhalt der Figur auf eine Nachkommastelle genau.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k : x \mapsto -5x \cdot e^{-k\,x}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbildung 5 zeigt vier Graphen der Schar, die zu den Werten $k = -1, k = -0{,}5, k = 0{,}5$ und $k = 1$ gehören.

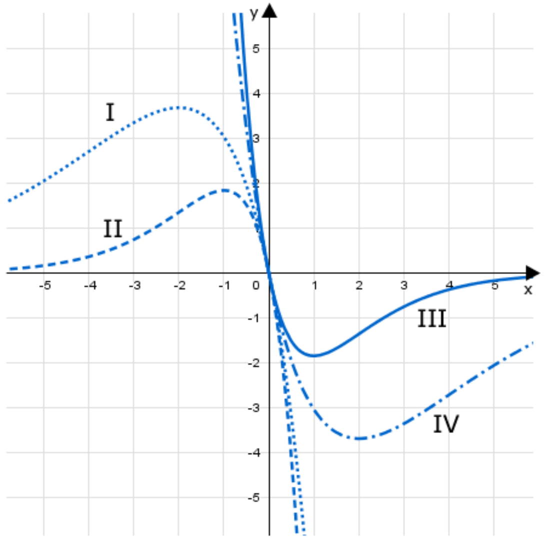


Abb. 5

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Der Graph III kann durch Spiegeln von G (vgl. Abbildung 3) an der $x-$Achse erzeugt werden. Geben Sie den zugehörigen Wert von k sowie die Koordinaten des Tiefpunkts von Graph III an. Ordnen Sie den drei übrigen Werten von k den jeweils passenden Graphen zu.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zeigen Sie, dass $g_k(-x) = -g_{-k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k}.

Lösung

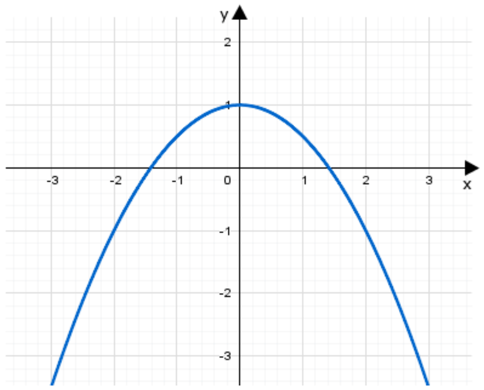
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.

Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Funktionsgraphen zuordnen



Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Es gibt genau eine positive reelle Zahl a, für die das Integral $\int_0^a f(x)\,\mathrm{dx}$ den Wert 0 hat.

Berechnen Sie a.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Bestimmtes Integral

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} + 1 \cdot x = -\frac{1}{6}x^3 + x$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Zur Bestimmung der Stammfunktion gilt:

$x^r \Rightarrow \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$

Zahl $\Rightarrow$ Zahl $\cdot x$

$\int\limits_0^a f(x)\ \text{dx}=0$

$\left[-\frac{1}{6}x^3 + x\right]_0^a = 0$

$-\frac{1}{6}a^3 + a - \left[\frac{1}{6} \cdot 0^3 + 0\right] = 0$

$-\frac{1}{6}a^3 + a = 0$

$a \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot a^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow (a_1 = 0)$ da $a > 0$

$-\frac{1}{6} \cdot a^2 + 1 = 0$

$1 = \frac{1}{6} \cdot a^2$

$6 = a^2$

$\Rightarrow (a_2 = -\sqrt{6})$ da $a > 0$

$\Rightarrow a_3 = \sqrt{6}$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\ \text{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion g.

Beschreiben Sie, wie man rechnerisch nachweisen kann, dass 2 eine Wendestelle von g ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wendepunkt ermitteln

Man weißt nach, dass 2 eine Nullstelle der zweiten Ableitungsfunktion von g ist und sich das Vorzeichen von $g''(x)$ an dieser Stelle ändert.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Der Punkt $(2|3)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen von g. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h ist gegeben durch $h(x) = g(2x) - 1$.
Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von h an und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Verschiebung von Funktionsgraphen

$(1|2)$

Begründung: Der Graph von h geht aus dem Graphen von g durch Streckung in $x-$Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und Verschiebung um 1 in negativer $y-$Richtung hervor.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

Für die zweite Ableitungsfunktion von f gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

Erläuterung: *Extrempunkt*

Damit ein Extrempunkt vorliegt muss gelten:

$f'(x_1) = 0$

$f'(2) = \frac{3}{4} \cdot (2)^2 - 3 = \frac{3}{4} \cdot 4 - 3 = 3 - 3 = 0$

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Einer der Graphen I und II in Abbildung 1 ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie ihre Angabe.

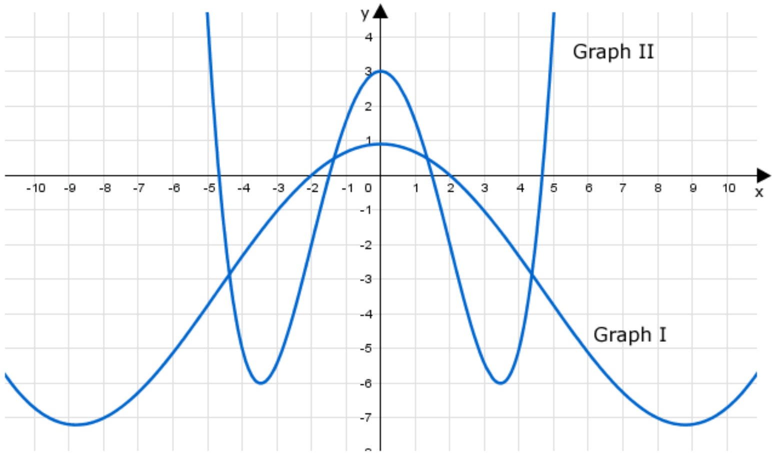


Abb. 1

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Stammfunktion

Graph II

Jede Stammfunktion von f hat die Wendestelle 2.

Erläuterung:

Die erste Ableitungsfunktion f' ist die zweite Ableitung der Stammfunktion.

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x-2}$ mit $x \in [2; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G von g sowie den Punkt $P(3|1)$. Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist die Tangente an G im Punkt P und hat mit G nur Punkt P gemeinsam.

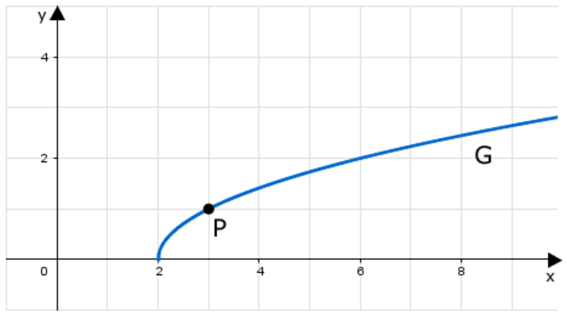
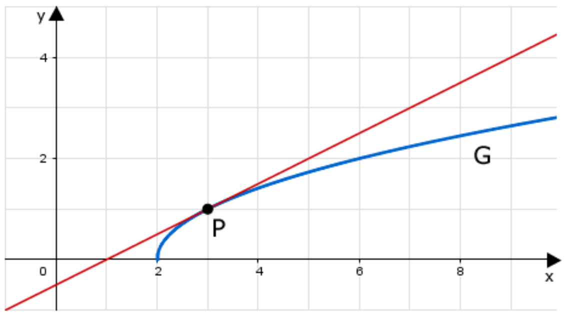


Abb.2

Zeichnen Sie die Tangente in Abbildung 2 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Tangentengleichung ermitteln



Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird eine Gerade, die mit G sowohl den Punkt P als auch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Geben Sie alle möglichen Steigungen dieser Gerade an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Tangentengleichung ermitteln

Eine Zahl m ist genau dann eine mögliche Steigung der Gerade mit der beschriebenen Eigenschaft, wenn $\frac{1}{2} < m \leq 1$ oder $0 < m < \frac{1}{2}$ gilt.

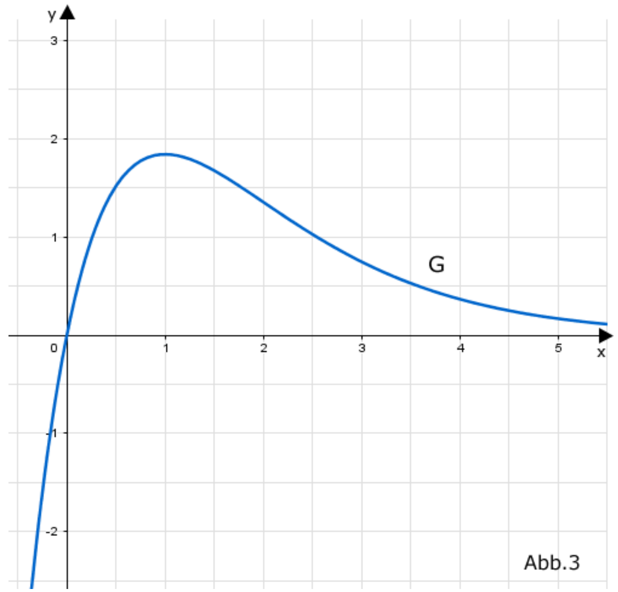
Erläuterung:

Die Steigung des Funktionsgrahen von G_G nimmt vor dem Punkt P zu. Die erste Tangente auf der, der Punkt P liegt, besitzt die Steigung 1, da diese Tangente die Diagonale der Kästchen ist. Danach nimmt die Steigung immer weiter ab.

Da die Gerade noch einen weiteren Punkt mit dem Graphen von G besitzen soll, ist die Steigung $m = \frac{1}{2}$ nicht möglich.

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 5x \cdot e^{-x}$. Abbildung 3 zeigt den Graphen G von f.



G hat genau einen Extrempunkt. Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts von G.
(zur Kontrolle: $\left(1|\frac{5}{e}\right)$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f'(x) = 5e^{-x} + 5x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 5 \cdot (1 - x) \cdot e^{-x}$

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = 5x$ und $v(x) = e^{-x}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$v(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -x$.

$f'(x) = 0$

$\underbrace{5}_{\neq 0} \cdot (1-x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0$

$1 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Lage des Extrempunkts:

$f(1) = \frac{5}{e}$

$E\left(1 | \frac{5}{e}\right)$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Die Tangente t an G in dessen Wendepunkt hat die Gleichung $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Gerade, die den Extrempunkt von G enthält und senkrecht zu t verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Steigung einer linearen Funktion

Für die Steigung muss gelten:

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$-\frac{5}{e^2} \cdot m_2 = -1$

$\frac{5}{e^2} \cdot m_2 = 1$

$5 \cdot m_2 = e^2 \Rightarrow m_2 = \frac{e^2}{5}$

Gleichung der Gerade:

$\frac{5}{e} = \frac{e^2}{5} \cdot (1) + t$

$\frac{25}{e} = e^2 + 5t$

$\frac{25}{e} - e^2 = 5t \Rightarrow t = \frac{5}{e} - \frac{e^2}{5}$

$\Rightarrow y = \frac{e^2}{5}x + \frac{5}{e} - \frac{e^2}{5}$

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Betrachtet wird die in $[1; +\infty[$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x)$.

Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar, die Funktion h jedoch umkehrbar ist. Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Umkehrfunktion von h an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Umkehrfunktion bestimmen

Abbildung 1 ist zu entnehmen, dass es zwei $x-$Werte gibt, für die $f(x) = 1$ gilt. Daher ist f nicht umkehrbar.

Die Funktion h ist umkehrbar, da f nur die Extremstelle 1 besitzt und somit im Intervall $[1; +\infty[$ streng monoton ist.

Erläuterung: *Umkehrfunktion*

Eine Funktion ist immer dann umkehrbar, wenn es zu jedem $x-$Wert genau einen $y-$Wert besitzt.

Definitionsbereich der Umkehrfunktion von h :$]0; \frac{5}{e}]$.

Wertebereich der Umkehrfunktion von h : $[1; +\infty[$

Erläuterung: *Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion*

Es gilt:

$D_f \Rightarrow W_{f^{-1}}$

$W_f \Rightarrow D_{f^{-1}}$

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Abbildung 4 zeigt eine Figur, die modellhaft das Wappen eines Sportvereins beschreibt. Die Begrenzungslinien der Figur werden durch einen Teil der Gerade mit der Gleichung $y = 5$ sowie durch die Kurvenstücke H_1 und H_2 beschrieben:

- H_1 entsteht, indem G für $x \in [\ln 5; 5]$an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt wird.
- H_2 entsteht durch Spiegeln von H_1 an der Gerade mit der Gleichung $x = \ln 5$.

Der Punkt $S(\ln 5|\ln 5)$ ist gemeinsamer Punkt von H_1 und H_2.

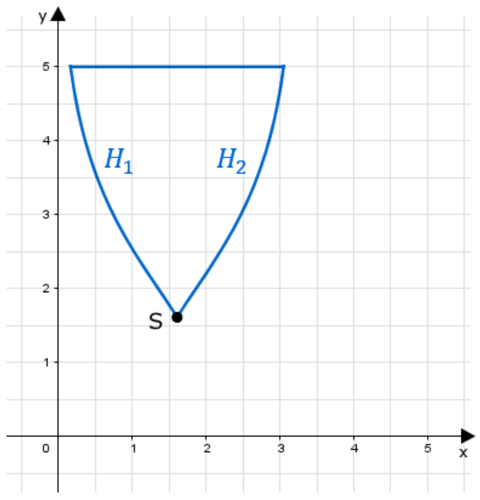


Abb. 4

Begründen Sie, dass mit dem Term $2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int_{\ln 5}^{5} f(x)\,\mathrm{dx} \right)$ der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann.

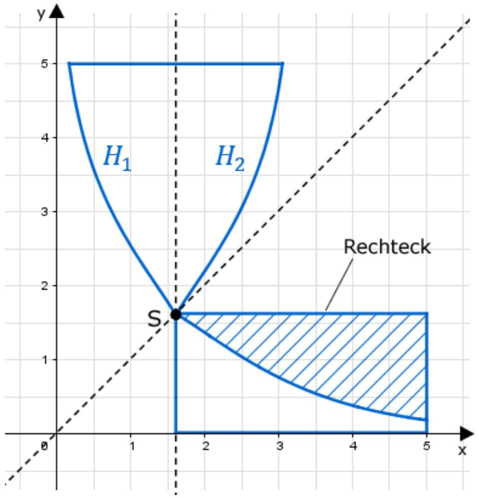
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Der Wert des Terms $(5 - \ln 5) \cdot \ln 5$ kann als Flächeninhalt eines Rechtecks der Länge $5 - \ln 5$ und der Breite $\ln 5$ gedeutet werden.

Der Wert des Terms $\int_{\ln 5}^{5} f(x)\,\mathrm{dx}$ entspricht dem Inhalt des Flächenstücks, das G und die Geraden mit den Gleichungen $x = \ln 5$ und $x = 5$ mit der $x-$Achse einschließen.

Subtrahiert man vom Flächeninhalt des Rechtecks den Flächeninhalt des beschriebenen Flächenstücks, so erhält man den Inhalt der schraffierten Fläche. Dieser entspricht dem Flächeninhalt derjenigen Hälfte der Figur, die durch Spiegeln an der Geraden mit der Gleichung $y = x$ aus der schraffierten Fläche hervorgeht.



Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto -5(x+1) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f. Berechnen Sie mit dem Term aus Aufgabe 1d den Flächeninhalt der Figur auf eine Nachkommastelle genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Bestimmtes Integral

$$2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int_{\ln 5}^{5} f(x)\ \mathrm{dx} \right) = 2 \cdot ((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - (F(5) - F(\ln 5))) \approx 6,1$$

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k : x \mapsto -5x \cdot e^{-k\,x}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbildung 5 zeigt vier Graphen der Schar, die zu den Werten $k = -1, k = -0,5, k = 0,5$ und $k = 1$ gehören.

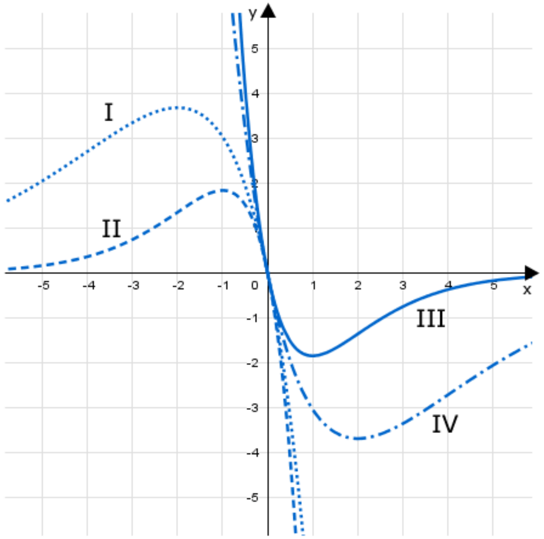


Abb. 5

Der Graph III kann durch Spiegeln von G (vgl. Abbildung 3) an der $x-$Achse erzeugt werden. Geben Sie den zugehörigen Wert von k sowie die Koordinaten des Tiefpunkts von Graph III an. Ordnen Sie den drei übrigen Werten von k den jeweils passenden Graphen zu.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionenschar

Graph $I\,I\,I : k = 1$, wegen den Koordinaten des Tiefpunkts: $\left(1 | -\frac{5}{e}\right)$.

Graph $I : k = -0,5$
Graph $I\,I : k = -1$
Graph $I\,V : k = 0,5$

Erläuterung:

$$g_k'(x) = -5 \cdot e^{-k\,x} - 5x \cdot e^{-k\,x} \cdot (-k) = -5 \cdot e^{-k\,x} + 5k\,x \cdot e^{-k\,x} = -5 \cdot (1 - k\,x) \cdot e^{-k\,x}$$

$$g_k'(x) = 0$$

$$\underbrace{-5}_{\neq 0} \cdot (1 - k\,x) \cdot \underbrace{e^{-k\,x}}_{\neq 0} = 0$$

$$1 - k\,x = 0$$

$$1 = k\,x$$

$$\frac{1}{k} = x_1$$

$$\frac{1}{-0,5} = -2 \Rightarrow \text{Graph } I$$

$$\frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \text{Graph } I\,I$$

$$\frac{1}{0,5} = -2 \Rightarrow \text{Graph } I\,V$$

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zeigen Sie, dass $g_k(-x) = -g_{-k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k}.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$-g_{-k}(x) = -\left(-5x \cdot e^{-(-k)\cdot x}\right) = 5x \cdot e^{k\,x}$$

$$g_k(-x) = -5 \cdot (-x) \cdot e^{-k(-x)} = 5x \cdot e^{k\,x}$$

$$\Rightarrow -g_{-k}(x) = g_k(-x)$$

Die Graphen der Funktion g_k und g_{-k} sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.