Abitur 2025 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 1$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie eine Gleichung der senkrechten und eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von f an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{dx}$.

Teilaufgabe Teil A 2 (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto x^2 - e^x$. Der Graph von g besitzt genau einen Wendepunkt W. Bestimmen Sie rechnerisch die $x-$Koordinate von W und beurteilen Sie, ob W oberhalb der $x-$Achse liegt.

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.

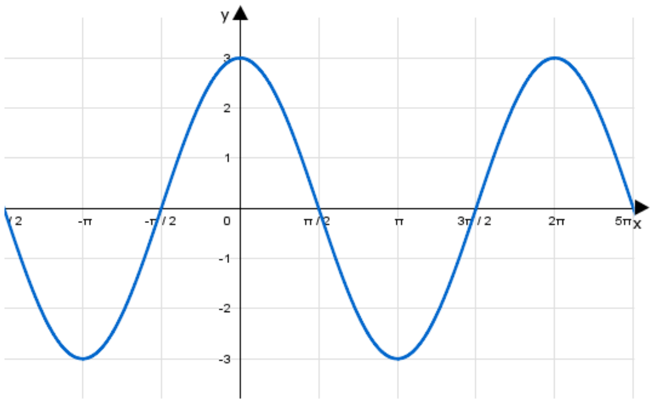


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 3a (1 BE)

Geben Sie den Wert des Integrals $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{dx}$ an.

Teilaufgabe Teil A 3b (4 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte $(0|-3)$ und $\left(\frac{\pi}{2}|\frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.

Teilaufgabe Teil A 4 (5 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion f und g, wobei g die Umkehrfunktion von f ist. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f und G_g von g. G_f und G_g schneiden sich nur im Koordinatenurspung und im Punkt $(x_S|f(x_S))$. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

$$\int\limits_0^{x_S} (g(x) - f(x))\,\mathrm{dx} = 2 \cdot \int\limits_0^{x_S} (x - f(x))\,\mathrm{dx}$$

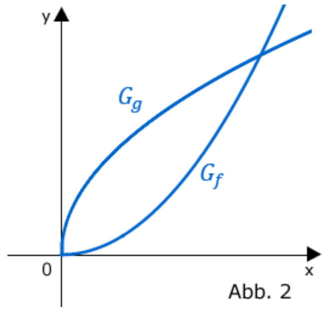
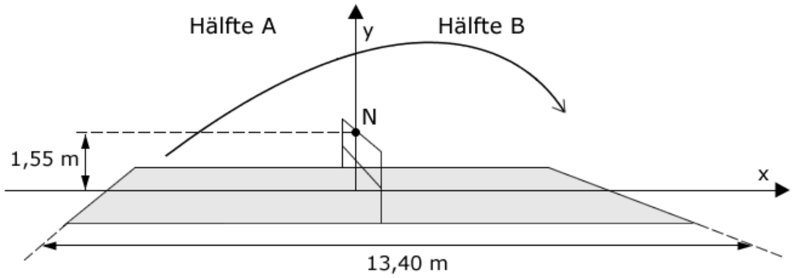


Abb. 2

Badminton wird auf einem rechteckigen Spielfeld gespielt, das 13, 40 m lang ist. Dabei wird ein Federball über ein 1, 55 m hohes Netz geschlagen (vgl. Abbildung).



Im Folgenden werden Flugbahnen von Federbällen, die von Hälfte A in Hälfte B des Spielfelds geschlagen werden, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben. Vereinfachend werden nur Flugbahnen betrachtet, die innerhalb einer Ebene verlaufen, die senkrecht zum horizontalen Boden und parallel zur Seitenlinie des Spielfelds ist. Das im Modell verwendete Koordinatensystem liegt in dieser Ebene, wobei die $x-$Achse den Boden und der Punkt N $(0|1,55)$ die horizontal verlaufende Oberkante des Netzes beschreibt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die in $]-\infty;6]$ definierte Funktion $f : x \mapsto 0,25 \cdot (x+6) \cdot \sqrt{6-x}$ beschreibt für $-5 \leq x \leq 6$ die Flugbahn bei einem bestimmten Schlag.

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der $y-$Achse an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Begründen Sie, dass der Federball bei diesem Schlag innerhalb von Hälfte B auf dem Boden auftrifft, wenn die Flugbahn nicht unterbrochen wird. Ein Spieler steht 3 m hinter dem Netz in Hälfte B unterhalb der Flugbahn des Federballs. Berechnen Sie die Höhe des Federballs über dem Boden an dieser Stelle.

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Weisen Sie nach, dass $\dfrac{6-3x}{8 \cdot \sqrt{6-x}}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f ist. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to 6} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Im Verlauf des Flugs erreicht der Federball eine maximale Höhe. Berechnen Sie diese.

Bei einem anderen Schlag wird die Flugbahn des Federballs für $-0,25 \leq x \leq 1$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto -2x + 2$ beschrieben.

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Skizze, dass die Entfernung eines beliebigen Punkts Q $(x|g(x))$ auf dem Graphen von g zum Punkt N $(0|1,55)$ durch den Term $d(x) = \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}$ beschrieben werden kann.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Auf dieser Flugbahn gibt es einen Punkt mit minimalem Abstand zur oberen Netzkante. Berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Im Folgenden werden Schläge betrachtet, bei denen die Flugbahn des Federballs jeweils mithilfe einer Funktion $h : x \mapsto a \cdot \sqrt{b-x} + c$ mit maximalem Definitionsbereich und $a, b, c \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Ermitteln Sie für $a = 2, b = 5$ und $c = -2$ in welcher Entfernung zur Netzebene und unter welchem Winkel der Federball auf dem Boden auftrifft.

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Ein Federball wird von einem Spieler in Hälfte A im Abstand von 1 m zur Netzebene in einer Höhe von $2,60$ m geschlagen und trifft im Abstand von 3 m zur Netzebene in Hälfte B senkrecht zum Boden auf diesem auf.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a, b und c.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + 1$.

Geben Sie eine Gleichung der senkrechten und eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Asymptoten einer Funktion

senkrechte Asymptote: $x = 0$

> Erläuterung: *Senkrechte Asymptote*
>
> Bei einer Definitionslücke befindet sich in der Regel eine senkrechte Asymptote.
>
> Hier liegt die Definitionslücke bei $x = 0$.

waagrechte Asymptote: $y = 1$

> Erläuterung: *Asymptoten*
>
> Z beschreibt den Grad des Zählers.
> N beschreibt den Grad des Nenners.
>
> $\Rightarrow Z < N$
>
> Dann liegt die waagrechte Asymptote bei $y = 0$
>
> Da die Funktion f um eine Einheit in positive $y-$Richtung verschoben wurde folgt daraus:
>
> $\Rightarrow y = 1$ ist die waagrechte Asymptote

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Bestimmtes Integral

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 = x^{-2} + 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} + 1 \cdot x = -x^{-1} + x = -\frac{1}{x} + x$$

> Erläuterung: *Stammfunktion*
>
> Zur Bestimmung der Stammfunktion gilt:
>
> $x^r \Rightarrow \dfrac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$
>
> Zahl $\Rightarrow$ Zahl $\cdot x$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{x} + x\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 2 - \left[-\frac{1}{1} + 1\right] = \frac{3}{2}$$

> Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
>
> Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teilaufgabe Teil A 2 (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto x^2 - e^x$. Der Graph von g besitzt genau einen Wendepunkt W. Bestimmen Sie rechnerisch die $x-$Koordinate von W und beurteilen Sie, ob W oberhalb der $x-$Achse liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2

Wendepunkt ermitteln

$g(x) = x^2 - e^x$

$g'(x) = 2x - e^x$

$g''(x) = 2 - e^x$

> Erläuterung: *Ableitungsregel*
>
> Bei der Ableitung gilt:
>
> $x^r \Rightarrow r \cdot x^{r-1}$
>
> $e^{g(x)} \Rightarrow e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$g''(x) = 0$

$2 - e^x = 0$
$2 = e^x$

$\Rightarrow x^W = l\,n(2)$

> Erläuterung: *Wendepunkt ermitteln*
>
> Ansatz für das Bestimmen eines Wendepunkts ist stets:
>
> $g''(x) = 0$

$g(\ln 2) = \underbrace{x^2}_{<1} - \underbrace{e^x}_{2} < 0$

$\Rightarrow y^W < 0$, deshalb liegt der Wendepunkt W unterhalb der $x-$Achse.

> Erläuterung:
>
> $\ln e = 1$ und da $e > 2$ folgt daraus $\ln 2 < 1$. Deshalb ist $(\ln 2)^2 < 1$

Teilaufgabe Teil A 3a (1 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.

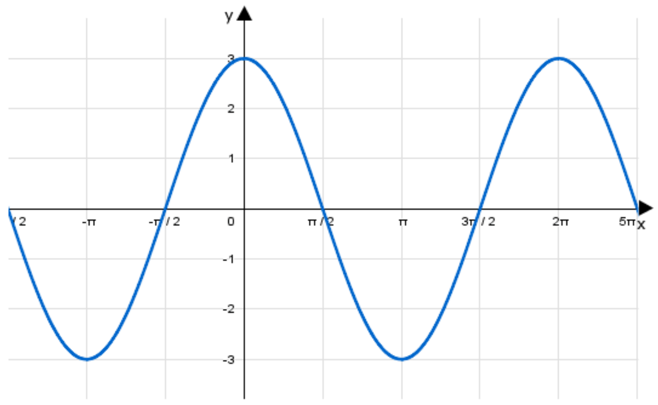


Abb. 1

Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{dx}$ an.

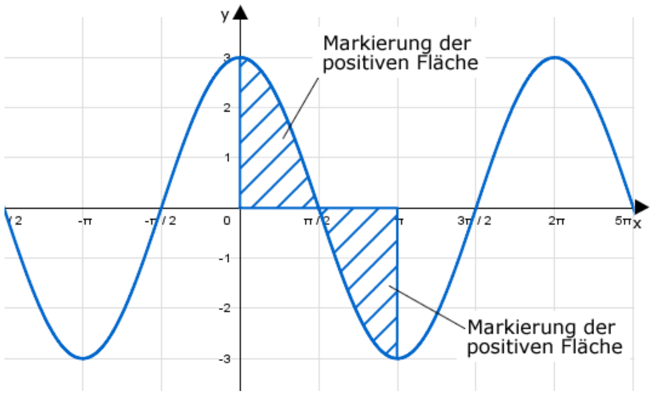
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Bestimmtes Integral

$\int_1^{\pi} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$

Erläuterung:

Ein bestimmtes Integral nimmt den Wert null an, wenn sich die Fläche oberhalb und unterhalb der $x-$Achse ausgleichen. Dann ist die Flächenbilanz ausgeglichen und somit der Wert des Integrals null.



Teilaufgabe Teil A 3b (4 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte $(0|-3)$ und $\left(\frac{\pi}{2}|\frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Funktionsgleichung ermitteln

$g(0) = -3:$

$$-3 = a \cdot 3\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \underbrace{b \cdot 0}_{=0}$$

$$-3 = 3a \Rightarrow a = -1$$

$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{4}\pi:$

$$\frac{3}{4}\pi = \underbrace{-3 \cdot \cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + b \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3}{4}\pi = b \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3}{2}\pi = b \cdot \pi \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Erläuterung:

Zur Bestimmung der reellen Zahlen a und b müssen die Punkte eingesetzt werden.

Teilaufgabe Teil A 4 (5 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion f und g, wobei g die Umkehrfunktion von f ist. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f und G_g von g. G_f und G_g schneiden sich nur im Koordinatenursprung und im Punkt $(x_S|f(x_S))$. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

$$\int_0^{x_S} (g(x) - f(x)) \, \mathrm{dx} = 2 \cdot \int_0^{x_S} (x - f(x)) \, \mathrm{dx}$$

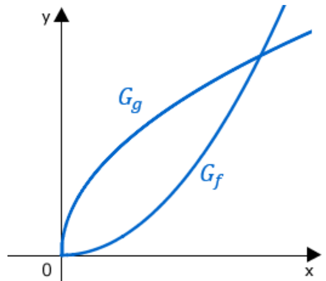


Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

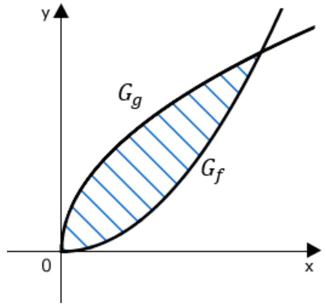
Der Wert des Integrals $\int\limits_0^{x_S} (g(x) - f(x))\,\mathrm{dx}$ entspricht dem Inhalt der Fläche von G_f und G_g eingeschlossenen Fläche.

Der Wert des Integrals $\int\limits_0^{x_S} (x - f(x))\,\mathrm{dx}$ entspricht dem Inhalt der von der Gerade mit der Gleichung $y = x$ und G_f eingeschlossenen Fläche.

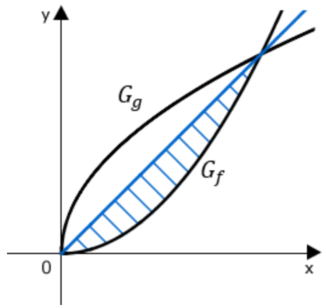
Da G_g durch Spiegelung von G_f an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ hervorgeht, hat die von G_f und G_g eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt wie die von der Gerade und der G_f eingeschlossenen Fläche. Damit ist die Aussage wahr.

Erläuterung:

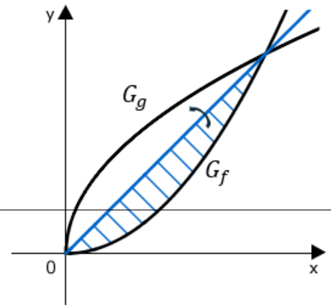
Inhalt der Fläche von G_f und G_g eingeschlossenen Fläche:



Inhalt der von der Gerade mit der Gleichung $y = x$ und G_f eingeschlossenen Fläche:

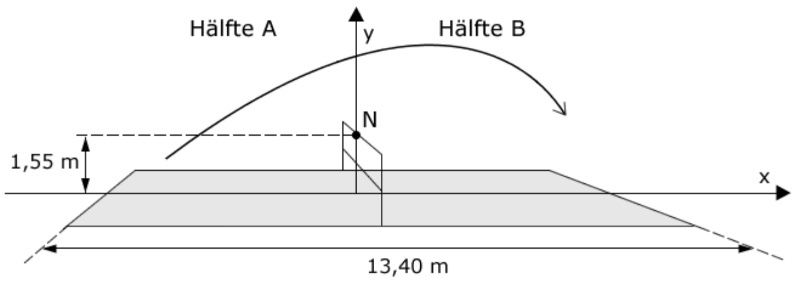


Darauf ergibt sich:



Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Badminton wird auf einem rechteckigen Spielfeld gespielt, das $13,40$ m lang ist. Dabei wird ein Federball über ein $1,55$ m hohes Netz geschlagen (vgl. Abbildung).



Im Folgenden werden Flugbahnen von Federbällen, die von Hälfte A in Hälfte B des Spielfelds geschlagen werden, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben. Vereinfachend werden nur Flugbahnen betrachtet, die innerhalb einer Ebene verlaufen, die senkrecht zum horizontalen Boden und parallel zur Seitenlinie des Spielfelds ist. Das im Modell verwendete Koordinatensystem liegt in dieser Ebene, wobei die $x-$Achse den Boden und der Punkt $N\ (0|1,55)$ die horizontal verlaufende Oberkante des Netzes beschreibt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die in $]-\infty;6]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 0,25\cdot(x+6)\cdot\sqrt{6-x}$ beschreibt für $-5 \leq x \leq 6$ die Flugbahn bei einem bestimmten Schlag.

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der $y-$Achse an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f(0) = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} \approx 3,67$

Der Federball befindet sich beim Überqueren des Netzes in einer Höhe von etwa $3,67$ m über dem Boden.

Erläuterung:

Das Netz befindet sich laut der Abbildung in der $y-$Achse.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Begründen Sie, dass der Federball bei diesem Schlag innerhalb von Hälfte B auf dem Boden auftrifft, wenn die Flugbahn nicht unterbrochen wird. Ein Spieler steht 3 m hinter dem Netz in Hälfte B unterhalb der Flugbahn des Federballs. Berechnen Sie die Höhe des Federballs über dem Boden an dieser Stelle.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 0$

Erläuterung:

Da sich das Netz in der $y-$Achse befindet und der Boden laut der Abbildung die $x-$Achse darstellt, sind die Nullstellen von f auch der Punkt an dem der Federball den Boden berührt.

$0,25\cdot(x+6)\cdot\sqrt{6-x} = 0$

Erläuterung:

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a\cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Da $e^{-0,5x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $1 - x^2$ untersucht werden.

$x + 6 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -6$

$\sqrt{6-x}=0$

$6-x=0$

$\Rightarrow x_2=6$

Wegen $f(6)=0$ und $\dfrac{13,40m}{2}=6,70m$ trifft der Federball innerhalb der Hälfte B auf den Boden auf.

Erläuterung:

Die negativen $x-$Werte beschreiben die Hälfte A und die positiven beschreiben die Hälfte von B

$f(3)\approx 3,9.$

Die gesuchte Höhe beträgt etwa $3,9$ m.

Teilaufgabe Teil B 1c (6 BE)

Weisen Sie nach, dass $\dfrac{6-3x}{8\cdot\sqrt{6-x}}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f ist. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to 6} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$f'(x)=0,25\cdot(1)\cdot\sqrt{6-x}+0,25\cdot(x+6)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{6-x}}\cdot(-1)=$$

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Produktregel:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x)=x+6$ und $v(x)=\sqrt{6-x}$.

Kettenregel für Wurzelfunktionen:

$$v(x)=\sqrt{g(x)}\quad\Rightarrow\quad v'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$$

In diesem Fall ist $g(x)=6-x$.

$$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{6-x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x+6}{2\sqrt{6-x}}=$$
$$=\frac{\sqrt{6-x}}{4}-\frac{x+6}{8\cdot\sqrt{6-x}}=$$

Erläuterung:

Um zwei Brüche addieren zu können, müssen diese auf den gleichen Nenner gebracht werden.

$$=\frac{\sqrt{6-x}\cdot 2\cdot\sqrt{6-x}}{4\cdot 2\cdot\sqrt{6-x}}-\frac{x+6}{8\cdot\sqrt{6-x}}=$$
$$=\frac{2\cdot(6-x)}{8\cdot\sqrt{6-x}}-\frac{x+6}{8\cdot\sqrt{6-x}}=$$

$$=\frac{12-2x-x-6}{8\cdot\sqrt{6-x}}=\frac{6-3x}{8\cdot\sqrt{6-x}}$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\overbrace{6-3x}^{\to -12}}{8\cdot\underbrace{\sqrt{6-x}}_{\to 0}}=-\infty$$

Erläuterung:

Beim Grenzwert gilt:

$$\frac{Zahl}{0} = \infty$$

Der Federball trifft senkrecht auf den Boden auf.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Im Verlauf des Flugs erreicht der Federball eine maximale Höhe. Berechnen Sie diese.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Art von Extrempunkten ermitteln

$f'(x) = 0$

$$\frac{6-3x}{8\cdot\sqrt{6-x}} = 0$$

$6 - 3x = 0$

$6 = 3x$

$x_1 = 2$

Erläuterung: *Nullstellen*

Ein Bruch ist immer dann null, wenn der Zähler null ist.

$f(2) = 4$

$\Rightarrow$ Die maximale Flughöhe beträgt $4m$.

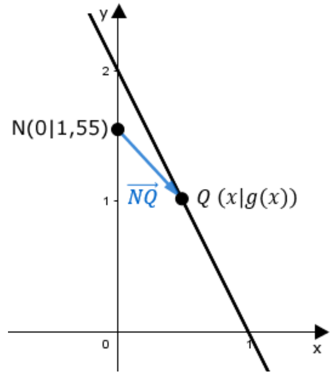
Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Bei einem anderen Schlag wird die Flugbahn des Federballs für $-0,25 \leq x \leq 1$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto -2x + 2$ beschrieben.

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Skizze, dass die Entfernung eines beliebigen Punkts $Q\ (x|g(x))$ auf dem Graphen von g zum Punkt $N\ (0|1,55)$ durch den Term $d(x) = \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}$ beschrieben werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Abstand zweier Punkte



Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Auch in der Analysis kann der Betrag eines Vektors, zur Bestimmung eines Abstands verwendet werden. (Alternativ: Satz des Pythagoras)

$$\left|\overrightarrow{NQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} x \\ -2x+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1,55 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x \\ -2x+0,45 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x)^2 + (-2x+0,45)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x^2 - 1,8x + 0,2025} = \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\Rightarrow d(x) = \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}$

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Auf dieser Flugbahn gibt es einen Punkt mit minimalem Abstand zur oberen Netzkante. Berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Art von Extrempunkten ermitteln

$$d'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}} \cdot (10x - 1,8) =$$

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Kettenregel für Wurzelfunktionen:

$$v(x) = \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

In diesem Fall ist $g(x) = 5x^2 - 1,8x + 0,2025$.

$$= \frac{10x - 1,8}{2 \cdot \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}}$$

$d'(x) = 0$

$$\frac{10x - 1,8}{2 \cdot \sqrt{5x^2 - 1,8x + 0,2025}} = 0$$

$10x - 1,8x = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Ein Bruch ist immer dann null, wenn der Zähler null ist.

$10 = 1,8x$

$\Rightarrow x_1 = 0,18$

$d(0,18) \approx 0,20$

$\Rightarrow$ Minimaler Abstand etwa $20cm$.

Erläuterung:

Es kann nur einen minimalern Abstand geben.

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Im Folgenden werden Schläge betrachtet, bei denen die Flugbahn des Federballs jeweils mithilfe einer Funktion $h : x \mapsto a \cdot \sqrt{b - x} + c$ mit maximalem Definitionsbereich und $a, b, c \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Ermitteln Sie für $a = 2, b = 5$ und $c = -2$ in welcher Entfernung zur Netzebene und unter welchem Winkel der Federball auf dem Boden auftrifft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Funktionenschar

$h(x) = 2 \cdot \sqrt{5 - x} - 2$

$h(x) = 0$

$2 \cdot \sqrt{5 - x} - 2 = 0$

$2 \cdot \sqrt{5 - x} = 2$

$\sqrt{5 - x} = 1$

$5 - x = 1$

$-x = -4$

$\Rightarrow x_1 = 4$

Der Federball trifft mit einem Abstand von $4m$ zur Netzebene auf.

Erläuterung:

Die positive $x-$Achse ist die Hälfte B in der, der Federball aufkommt.

$h'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{5-x}} \cdot (-1) =$

Erläuterung: *Ableitungsregel*

Kettenregel für Wurzelfunktionen:

$v(x) = \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = 5 - x$.

$= -\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

$\tan(\alpha) = m$

$\alpha = \left|\tan^{-1}(h'(4))\right| = 45^\circ$

Der Federball trifft unter einem Winkel von 45° auf.

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Ein Federball wird von einem Spieler in Hälfte A im Abstand von 1 m zur Netzebene in einer Höhe von $2,60$ m geschlagen und trifft im Abstand von 3 m zur Netzebene in Hälfte B senkrecht zum Boden auf diesem auf.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a, b und c.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Funktionenschar

Da der Graph von h nur an der Stelle $x = b$ senkrecht verläuft, ergibt sich $b = 3$.

Erläuterung:

Die Funktion verläuft dann senkrecht, wenn $x = b$ ist, siehe dazu auch Teilaufgabe c.

$h(3) = 0$

$a \cdot \sqrt{3-3} + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Erläuterung:

Der Ball trifft auf den Boden auf $\Rightarrow h(x) = 0$.

$h(-1) = 2,6$

$a \cdot \sqrt{3-(-1)} + 0 = 2,6$

$2a = 2,6 \Rightarrow a = 1,3$

Erläuterung:

$1m$ zur Netzebene in einer Höhe von $2,6m$ wird der Ball geschlagen:

Vor der Netzkante liegt im Negativen auf der $x-$Achse.

In einer Höhe von $2,6m$ beschreibt den $y-$Wert.