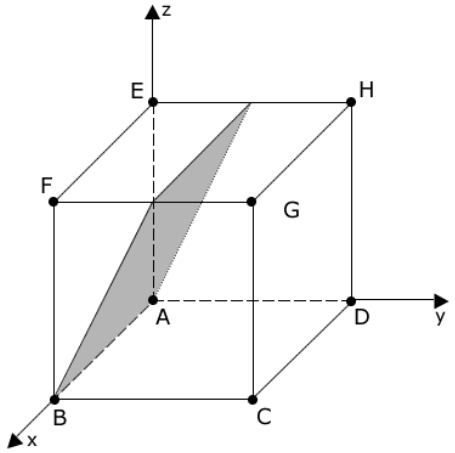
Abitur 2025 Mathematik Geometrie VI

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen.
Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante [FG].



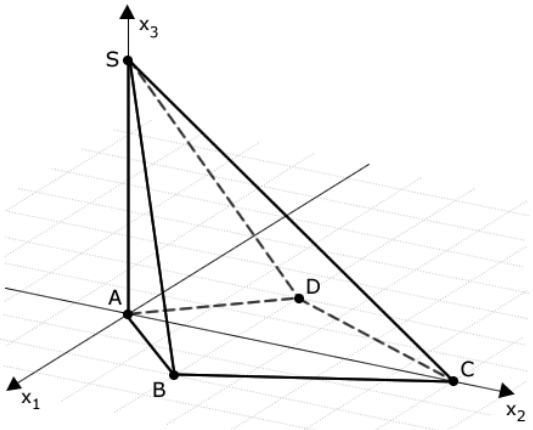
Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante [BC]. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an.

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Der Punkt $S(0|0|6)$ ist die Spitze der Pyramide.



Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Betrachtet werden die Vektoren $\vec{n}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ so ist er ein Normalenvektor von E.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der $x_1\,x_2-$Ebene einschließt.

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k , wobei der Punkt Q_k auf der Strecke [SC] liegt.

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.

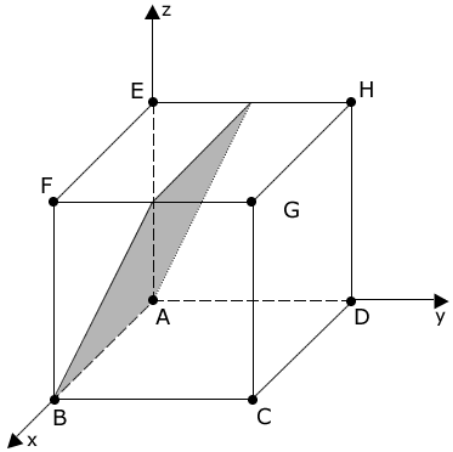
Teilaufgabe Teil B e (6 BE)

Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen.
Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante [FG].



Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Volumen eines Prismas

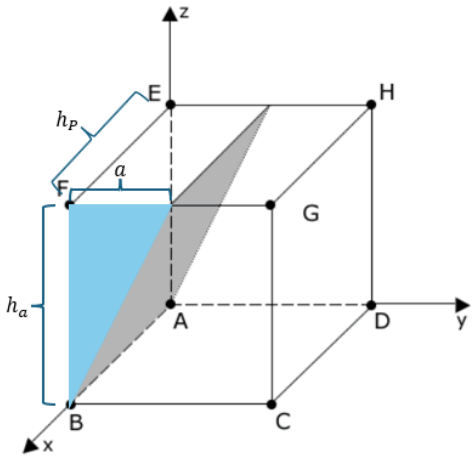
Das Volumen eines Prismas berechnet man mit folgender Formel:

$V_P = G \cdot h$

$\Rightarrow V_P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 16V\,E$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*



Aufgrund der Kantenlänge von 4 ergibt sich:

Für die Grundseite a des Dreiecks, welches die Grundfläche bildet: $a = 2$

Für die Höhe h_a des Dreiecks, welches die Grundfläche bildet: $h_a = 4$

Für die Höhe h_P des Prismas: $h_P = 4$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

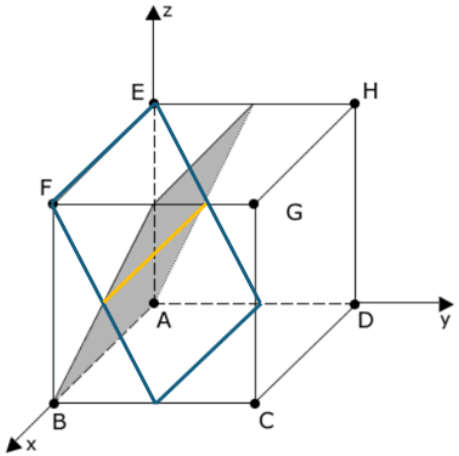
Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante [BC]. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Lagebeziehung von Ebenen

Die Ebene L lässt sich mit Hilfe des Dreiecks aus den Punkten E, F und M_{BC} zeichnen und

zu einem Viereck erweitern:

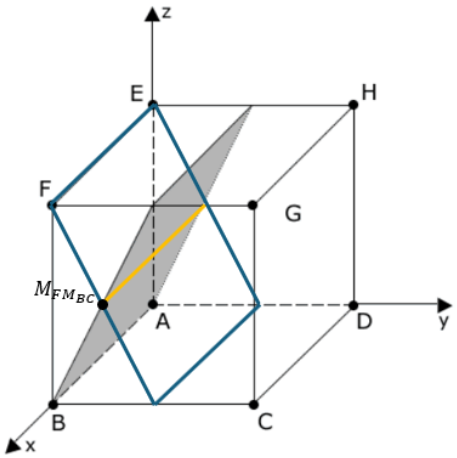


Die Gleichung der Schnittgerade, der beiden Ebenen lautet:

$$s : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Geradengleichung*



Der Aufpunkt der Schnittgerade wird gebildet aus dem Mittelpunkt zwischen dem Eckpunkt F und dem Mittelpunkt der Kante [BC]:

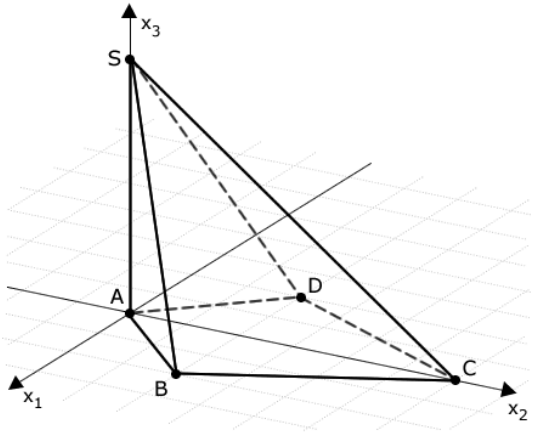
$\Rightarrow M_{F\,M_{B\,C}}(4|1|2)$

Der Richtungsvektor der Schnittgerade ergibt sich aus der Richtung der x_1-Achse:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Der Punkt $S(0|0|6)$ ist die Spitze der Pyramide.



Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Länge eines Vektors

Die kleinste Kantenlänge ist die Kante $[A\,B]$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

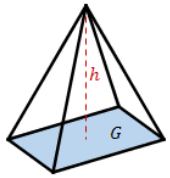
Um das Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ zu bestimmen nutzt man folgende Formel:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

© Abiturloesung.de

$$\Rightarrow V_P = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2) \cdot 6 = 24$$

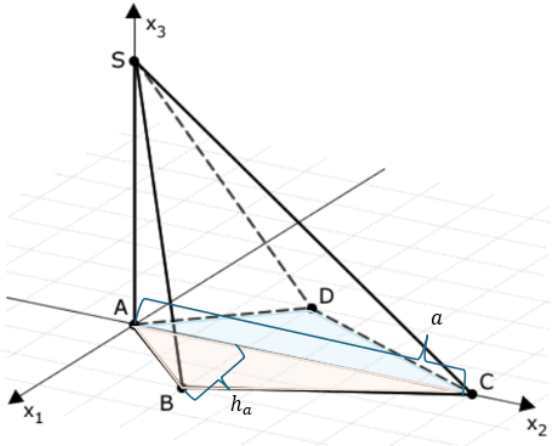
Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Hier ist die Grundfläche zusammengesetzt aus zwei Dreiecken:



Die Grundseite a des Dreiecks besitzt die Länge 6.

Die Höhe auf die Grundseite h_a des Dreiecks besitzt die Länge 2.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

Betrachtet werden die Vektoren $\vec{n}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ so ist er ein Normalenvektor von E.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebenengleichung in Normalenform

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Die Länge eines Vektors ist nicht entscheidend für die Richtung des Vektors. Somit hat das Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor keinen Einfluss auf die Richtung.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{Bs}$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Die Länge eines Vektors ist nicht entscheidend für die Richtung des Vektors. Somit hat das Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor keinen Einfluss auf die Richtung.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Da die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ die Ebene E aufspannen und $\vec{n}$ zu diesen Vektoren senkrecht steht, ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der $x_1\,x_2$−Ebene einschließt.

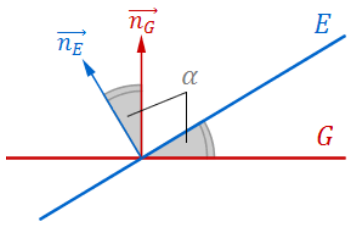
Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Winkel zwischen zwei Ebenen

$x_1\,x_2$-Ebene: $\vec{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x_3}} = 0$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \underbrace{\cos \measuredangle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{x_3}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{x_3}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+1} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 65,9°$$

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke [SC] liegt.

Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.

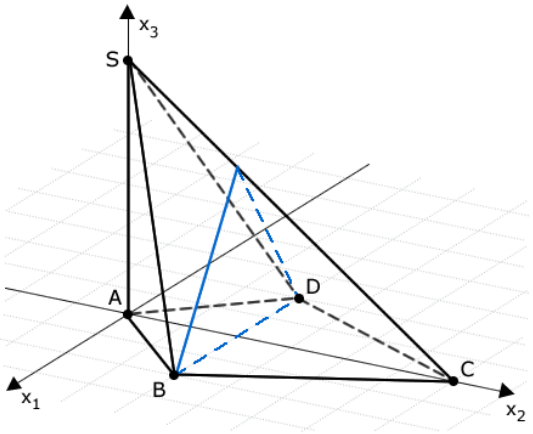
Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Ebenengleichung in Normalenform

$F_2 : 2 \cdot x_2 + (2-2) \cdot x_3 = 2 \cdot 2$

$F_2 : 2x_2 = 4$

$F_2 : x_2 = 2$



Erläuterung:

Da die Ebene F_2 echt parallel zur $x_1\,x_3-$Ebene verläuft, kann diese mit Hilfe des Spurpunkts auf der x_2-Achse schnell gezeichnet werden.

Teilaufgabe Teil B e (6 BE)

Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Anwendungsaufgabe

Die Eckpunkte B und D des Dreiecks $B\,D\,Q_k$ sind fix.

Der Vektor aus dem Mittelpunkt der Strecke $[B\,D]$ und dem Punkt Q_k bildet die Höhe des Dreiecks $B\,D\,Q_k$. Diese Höhe muss für den minimalen Flächeninhalt des Dreiecks $B\,D\,Q_k$ minimal sein. Dies wird die Höhe, wenn gilt:

$\overrightarrow{SC} \perp F_k \Rightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{n_F}$

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$k = \lambda \cdot 6$

$k - 2 = -6\lambda$

$\Rightarrow 6\lambda - 2 = 6\lambda$

$12\lambda = 2$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$
$\Rightarrow k = 1$