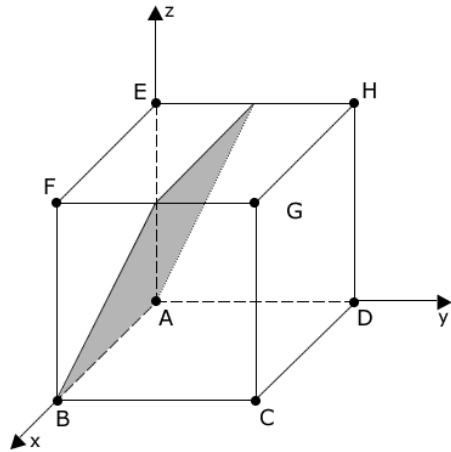


## Abitur 2025 Mathematik Geometrie VI

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen.

Die Ebene  $K$  enthält die Punkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(4|0|0)$  und den Mittelpunkt der Kante  $[FG]$ .



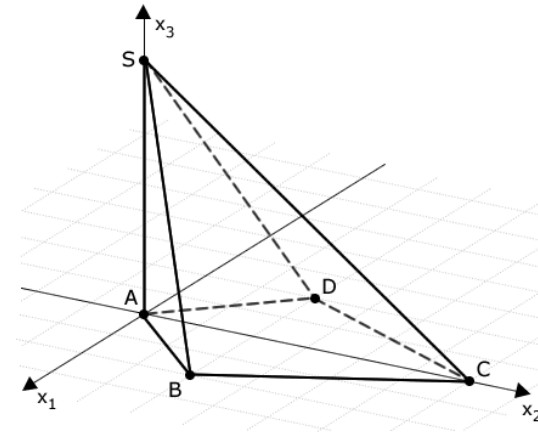
### Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Ebene  $K$  teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

### Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Eine zweite Ebene  $L$  enthält die Punkte  $E$  und  $F$  sowie den Mittelpunkt der Kante  $[BC]$ . Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen  $K$  und  $L$  an.

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten  $A(0|0|0)$ ,  $B(2|2|0)$ ,  $C(0|6|0)$  und  $D(-2|2|0)$ . Der Punkt  $S(0|0|6)$  ist die Spitze der Pyramide.



### Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene  $E$ .

### Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Betrachtet werden die Vektoren  $\vec{n}$ , deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor  $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$  und  $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$  so ist er ein Normalenvektor von  $E$ .

**Teilaufgabe Teil B c** (3 BE)

Die Ebene  $E$  hat die Gleichung  $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$ . Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den  $E$  mit der  $x_1 x_2$ -Ebene einschließt.

Gegeben ist die Schar der Ebenen  $F_k : k \cdot x_2 + (k - 2) \cdot x_3 = 2k$  mit  $k \in ]0; 3[$ . Jede Ebene  $F_k$  der Schar schneidet die Pyramide  $ABCDS$  in einem Dreieck  $BDQ_k$ , wobei der Punkt  $Q_k$  auf der Strecke  $[SC]$  liegt.

**Teilaufgabe Teil B d** (4 BE)

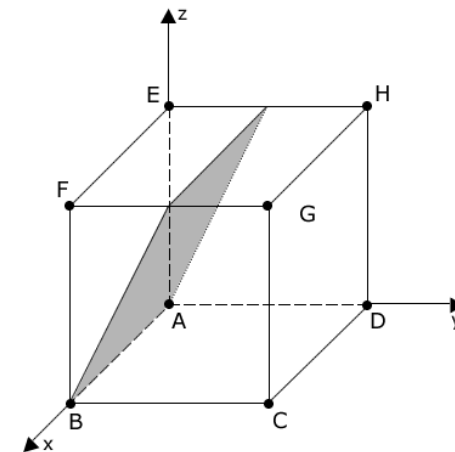
Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $F_2$  an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von  $F_2$  mit der Pyramide  $ABCDS$  ein.

**Teilaufgabe Teil B e** (6 BE)

Es gibt einen Wert von  $k$ , für den der Flächeninhalt des Dreiecks  $BDQ_k$  minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

**Lösung****Teilaufgabe Teil A a** (2 BE)

Die Abbildung zeigt einen Würfel  $ABCDEFGH$  der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen. Die Ebene  $K$  enthält die Punkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(4|0|0)$  und den Mittelpunkt der Kante  $[FG]$ .



Die Ebene  $K$  teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

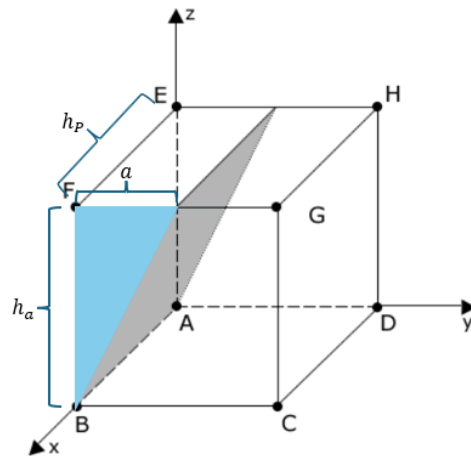
**Lösung zu Teilaufgabe Teil A a****Volumen eines Prismas**

Das Volumen eines Prismas berechnet man mit folgender Formel:

$$V_P = G \cdot h$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \text{ V E}$$

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*



Aufgrund der Kantenlänge von 4 ergibt sich:

Für die Grundseite  $a$  des Dreiecks, welches die Grundfläche bildet:  $a = 2$

Für die Höhe  $h_a$  des Dreiecks, welches die Grundfläche bildet:  $h_a = 4$

Für die Höhe  $h_P$  des Prismas:  $h_P = 4$

#### Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

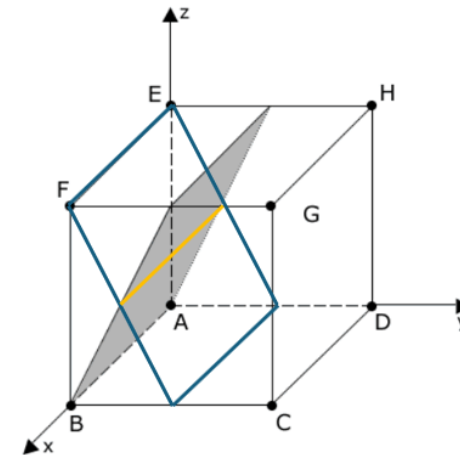
Eine zweite Ebene  $L$  enthält die Punkte  $E$  und  $F$  sowie den Mittelpunkt der Kante  $[BC]$ . Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen  $K$  und  $L$  an.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

##### Lagebeziehung von Ebenen

Die Ebene  $L$  lässt sich mit Hilfe des Dreiecks aus den Punkten  $E, F$  und  $M_{BC}$  zeichnen und

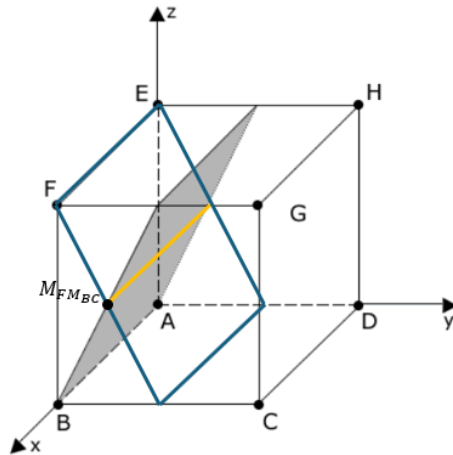
zu einem Viereck erweitern:



Die Gleichung der Schnittgerade, der beiden Ebenen lautet:

$$s : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: Geradengleichung



Der Aufpunkt der Schnittgerade wird gebildet aus dem Mittelpunkt zwischen dem Eckpunkt  $F$  und dem Mittelpunkt der Kante  $[BC]$ :

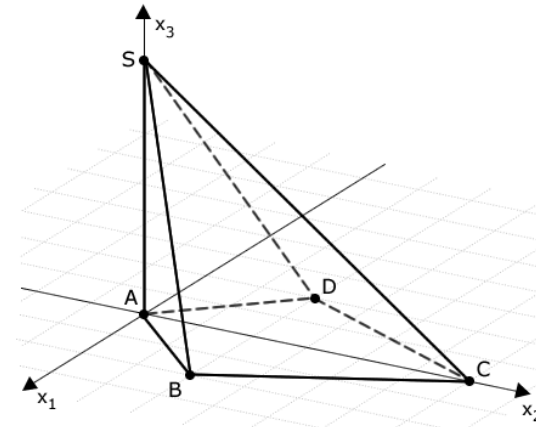
$$\Rightarrow M_{FM_{BC}}(4|1|2)$$

Der Richtungsvektor der Schnittgerade ergibt sich aus der Richtung der  $x_1$ -Achse:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Die Abbildung zeigt die Pyramide  $ABCDS$ . Ihre Grundfläche  $ABCD$  ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten  $A(0|0|0)$ ,  $B(2|2|0)$ ,  $C(0|6|0)$  und  $D(-2|2|0)$ . Der Punkt  $S(0|0|6)$  ist die Spitze der Pyramide.



Berechnen Sie die kleinste Kantenlänge sowie das Volumen der Pyramide  $ABCDS$ .

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

##### Länge eines Vektors

Die kleinste Kantenlänge ist die Kante  $[AB]$ :

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$$

Erläuterung: Betrag eines Vektors

Die Länge (bzw. der Betrag)  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:

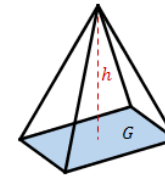
$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Um das Volumen der Pyramide  $ABCDS$  zu bestimmen nutzt man folgende Formel:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\right) \cdot 6 = 24$$

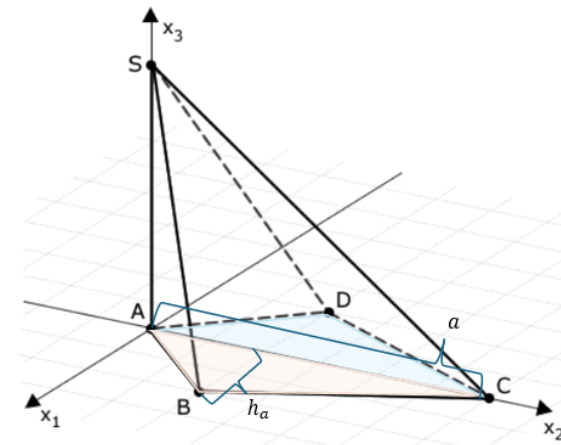
Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Hier ist die Grundfläche zusammengesetzt aus zwei Dreiecken:



Die Grundseite  $a$  des Dreiecks besitzt die Länge 6.

Die Höhe auf die Grundseite  $h_a$  des Dreiecks besitzt die Länge 2.

**Teilaufgabe Teil B b** (3 BE)

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene  $E$ .

Betrachtet werden die Vektoren  $\vec{n}$ , deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

Gilt für einen solchen Vektor  $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$  und  $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$  so ist er ein Normalenvektor von  $E$ .

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b**Ebenengleichung in Normalenform**

$$\vec{BC} = \vec{OB} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{BC}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Die Länge eines Vektors ist nicht entscheidend für die Richtung des Vektors. Somit hat das Vereinfachen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor keinen Einfluss auf die Richtung.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\vec{BS} = \vec{OS} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{BS}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Die Länge eines Vektors ist nicht entscheidend für die Richtung des Vektors. Somit hat das Vereinfachen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor keinen Einfluss auf die Richtung.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Da die Vektoren  $\vec{BC}$  und  $\vec{BS}$  die Ebene  $E$  aufspannen und  $\vec{n}$  zu diesen Vektoren senkrecht steht, ist  $\vec{n}$  ein Normalenvektor von  $E$ .

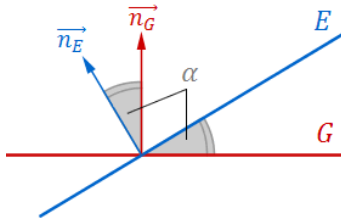
**Teilaufgabe Teil B c** (3 BE)

Die Ebene  $E$  hat die Gleichung  $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$ . Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den  $E$  mit der  $x_1 x_2$ -Ebene einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c**Winkel zwischen zwei Ebenen**

$$x_1 x_2\text{-Ebene: } \vec{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_3} = 0$$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Ebenen  $E$  und  $G$  ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren  $\vec{n}_E$  und  $\vec{n}_G$ .

Winkel  $\varphi$  zwischen den Normalenvektoren bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{x}_3|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{x}_3|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+1} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \approx 65,9^\circ$$

#### Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen  $F_k : k \cdot x_2 + (k - 2) \cdot x_3 = 2k$  mit  $k \in ]0; 3[$ . Jede Ebene  $F_k$  der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck  $BDQ_k$ , wobei der Punkt  $Q_k$  auf der Strecke [SC] liegt.

Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $F_2$  an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von  $F_2$  mit der Pyramide ABCDS ein.

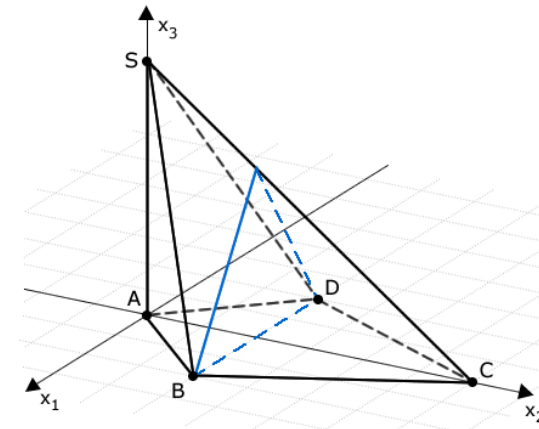
#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

##### Ebenengleichung in Normalenform

$$F_2 : 2 \cdot x_2 + (2 - 2) \cdot x_3 = 2 \cdot 2$$

$$F_2 : 2x_2 = 4$$

$$F_2 : x_2 = 2$$



Erläuterung:

Da die Ebene  $F_2$  echt parallel zur  $x_1 x_3$ -Ebene verläuft, kann diese mit Hilfe des Spurpunkts auf der  $x_2$ -Achse schnell gezeichnet werden.

#### Teilaufgabe Teil B e (6 BE)

Es gibt einen Wert von  $k$ , für den der Flächeninhalt des Dreiecks  $BDQ_k$  minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

##### *Anwendungsaufgabe*

Die Eckpunkte  $B$  und  $D$  des Dreiecks  $BDQ_k$  sind fix.

Der Vektor aus dem Mittelpunkt der Strecke  $[BD]$  und dem Punkt  $Q_k$  bildet die Höhe des Dreiecks  $BDQ_k$ . Diese Höhe muss für den minimalen Flächeninhalt des Dreiecks  $BDQ_k$  minimal sein. Dies wird die Höhe, wenn gilt:

$$\vec{SC} \perp F_k \Rightarrow \lambda \cdot \vec{SC} = \vec{n}_{F_k}$$

$$\vec{SC} = \vec{OC} - \vec{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$k = \lambda \cdot 6$$

$$k - 2 = -6\lambda$$

$$\Rightarrow 6\lambda - 2 = 6\lambda$$

$$12\lambda = 2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k = 1$$