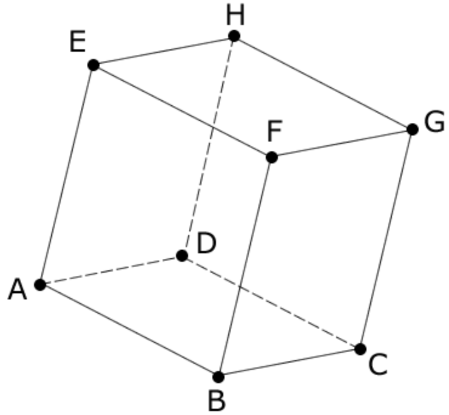
Abitur 2025 Mathematik Geometrie V

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(3|2|-1)$ und $E(1|1|1)$.



Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Zeigen Sie, dass der Würfel die Kantenlänge 3 besitzt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Der Punkt S liegt so auf der Strecke [AE], dass die Pyramide ABCDS das Volumen 3 hat. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Gegeben sind die Punkte $A(30|-5|-12)$, $B(30|13|0)$, $C(-30|13|0)$ und $D(-30|-5|-12)$, die in der Ebene E liegen.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle:$E: 2x_2 - 3x_3 - 26 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe φ des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

(zur Kontrolle:$\varphi \approx 33,7°$)

Im Folgenden wird ein Sperrwerk an einem Fluss betrachtet, das dem Schutz vor Überflutungen bei Sturmfluten dient. Ein Teil dieses Sperrwerks besteht aus zwei kreisförmigen Metallscheiben, an denen ein Sperrtor befestigt ist. Durch Drehung der Metallscheiben wird das Sperrtor in verschiedene Stellungen gebracht.
In einem Koordinatensystem werden die beiden Metallscheiben durch die Grund- und Deckfläche eines geraden Zylinders dargestellt. Die x_1-Achse verläuft durch die Mittelpunkte dieser beiden Kreisflächen und entspricht der Drehachse der Metallscheiben.
Die Ebene E schneidet den Zylinder im Rechteck ABCD und zerlegt diesen in zwei Teilkörper. Der kleinere Teilkörper entspricht dem Sperrtor in einer speziellen Stellung (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.
Es wird vereinfachend ausschließlich ein Wasserstand betrachtet, bei dem die Wasseroberfläche im Modell in der x_1x_2-Ebene liegt.

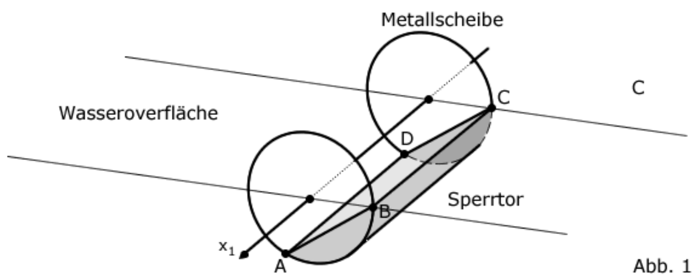


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Geben Sie den Durchmesser einer Metallscheibe und den Abstand der beiden Metallscheiben jeweils in Metern an.

Ist das Sperrtor geöffnet, so liegt dessen rechteckige Seitenfläche unterhalb der Wasseroberfläche und ist parallel zu ihr (vgl. Abbildung 2a). Ist das Sperrtor geschlossen, so steht die Seitenfläche senkrecht zur Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 2b).

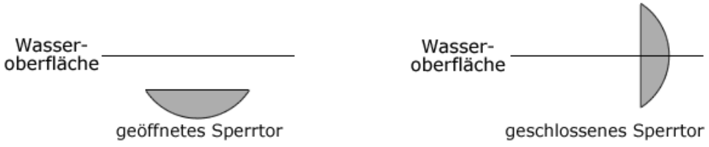


Abb. 2a Abb. 2b

Bei einem Schließvorgang wird das geöffnete Sperrtor durch eine Vierteldrehung der Metallscheiben mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von 15 Minuten geschlossen.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Schließvorgangs befinden sich erstmals Teile des Sperrtors an der Wasseroberfläche. Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe c die Zeit, die ab diesem Zeitpunkt bis zum Ende des Schließvorgangs vergeht.

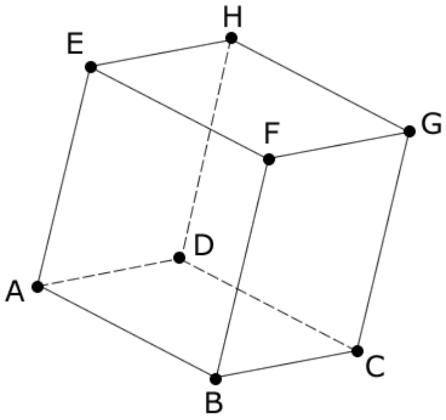
Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Die tiefste Stelle eines Schiffs bewegt sich im Modell auf der Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Beurteilen Sie anhand einer Rechnung, ob das Schiff das Sperrwerk passieren kann, wenn das Sperrtor geöffnet ist.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(3|2|-1)$ und $E(1|1|1)$.



Zeigen Sie, dass der Würfel die Kantenlänge 3 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Länge eines Vektors

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Der Punkt S liegt so auf der Strecke [AE], dass die Pyramide ABCDS das Volumen 3 hat. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Koordinaten von Punkten ermitteln

Für das Volumen V einer Pyramide $ABCDS$ über der quadratischen Grundfläche $ABCD$ mit Seitenlänge 3 aus Teilaufgabe a gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot h$$

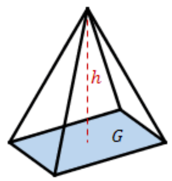
Das Volumen ist laut Aufgabenstellung 3:

$$3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot h$$

$$3 = 3h$$

$$\Rightarrow h = 1$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Hier ist die Grundfläche ein Quadrat mit Kantenlänge 3.

Damit ergibt sich aufgrund der Seitenlänge 3 des Würfels zur Berechnung des Punktes S:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(\tfrac{7}{3}|\tfrac{5}{3}|-\tfrac{1}{3})$$

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(30|-5|-12)$, $B(30|13|0)$, $C(-30|13|0)$ und $D(-30|-5|-12)$, die in der Ebene E liegen.

Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 30 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}$$

© Abiturloesung.de

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -30 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Parallelogramm

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -30 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$\Rightarrow \quad ABCD$ ist ein Rechteck

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $E: 2x_2 - 3x_3 - 26 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -720 \\ 1080 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = -\frac{1}{360} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -720 \\ 1080 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $-\frac{1}{360}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OA}}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

E: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{OP}$

Hier (OP ist Aufpunkt):

E: $2x_2 - 3x_3 = 0 - 10 + 36$

$E\colon 2x_2 - 3x_3 = 26$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Die x_1-Koordinate von $\overrightarrow{n_E}$ ist Null und die Konstante d ist ungleich 0, somit ist der Ursprung nicht Teil der Ebene.

$\Rightarrow \quad E$ verläuft parallel zur x_1-Achse.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe φ des Winkels, den E mit der $x_1\,x_2$−Ebene einschließt.

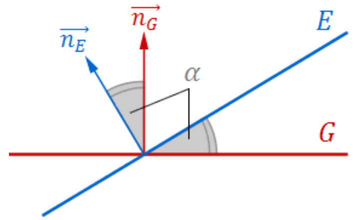
(zur Kontrolle:$\varphi \approx 33,7°$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Winkel zwischen zwei Ebenen

$x_1\,x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{x_3}} = 0$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{x_3}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{x_3}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0+4+9} \cdot 1} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) \approx 33,7°$$

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Im Folgenden wird ein Sperrwerk an einem Fluss betrachtet, das dem Schutz vor Überflutungen bei Sturmfluten dient. Ein Teil dieses Sperrwerks besteht aus zwei kreisförmigen Metallscheiben, an denen ein Sperrtor befestigt ist. Durch Drehung der Metallscheiben wird das Sperrtor in verschiedene Stellungen gebracht.
In einem Koordinatensystem werden die beiden Metallscheiben durch die Grund- und Deckfläche eines geraden Zylinders dargestellt. Die x_1-Achse verläuft durch die Mittelpunkte dieser beiden Kreisflächen und entspricht der Drehachse der Metallscheiben.
Die Ebene E schneidet den Zylinder im Rechteck ABCD und zerlegt diesen in zwei Teilkörper. Der kleinere Teilkörper entspricht dem Sperrtor in einer speziellen Stellung (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.
Es wird vereinfachend ausschließlich ein Wasserstand betrachtet, bei dem die Wasseroberfläche im Modell in der x_1x_2-Ebene liegt.

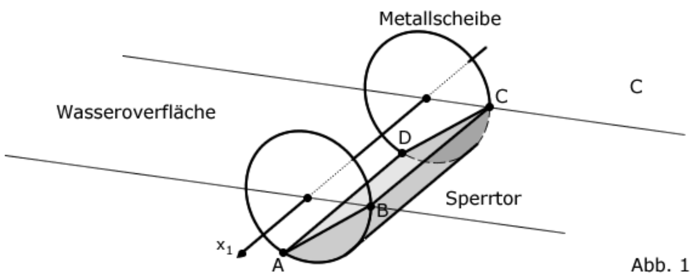


Abb. 1

Geben Sie den Durchmesser einer Metallscheibe und den Abstand der beiden Metallscheiben jeweils in Metern an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Abstand zweier Punkte

Der Radius der Metallscheibe entspricht dem Abstand des Punktes B zur x_1-Achse. Dieser Abstand entspricht dem Wert der x_2 Koordinate:

$B(30|13|0) \Rightarrow r = 13$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität und für den Durchmesser der Metallscheibe d gilt $d = 2 \cdot r$. Daraus folgt:

$d = 2 \cdot 13 \Rightarrow d = 26m$

Der Abstand der beiden Metallscheiben entspricht dem Abstand der beiden Punkt A und B. Daraus folgt:

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-60)^2 + 0 + 0} = 60m$$

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Ist das Sperrtor geöffnet, so liegt dessen rechteckige Seitenfläche unterhalb der Wasseroberfläche und ist parallel zu ihr (vgl. Abbildung 2a). Ist das Sperrtor geschlossen, so steht die Seitenfläche senkrecht zur Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 2b).

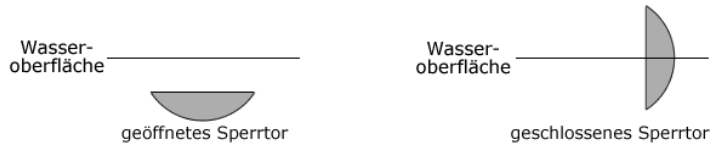


Abb. 2a Abb. 2b

Bei einem Schließvorgang wird das geöffnete Sperrtor durch eine Vierteldrehung der Metallscheiben mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von 15 Minuten geschlossen.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Schließvorgangs befinden sich erstmals Teile des Sperrtors an der Wasseroberfläche. Bestimmen Sie mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe c die Zeit, die ab diesem Zeitpunkt bis zum Ende des Schließvorgangs vergeht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Winkel bestimmen

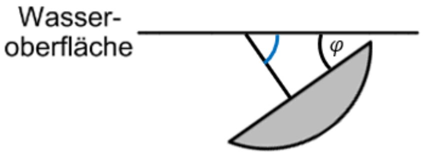
Aus Teilaufgabe c kann die bereits erfolgte Drehung von $33,7°$ entnommen werden:

$\Rightarrow 90° - 33,7° = 56,3°$

© Abiturloesung.de

Erläuterung:

Der Winkel zwischen der Wasseroberfläche φ beschreibt die bereits erfolgte Drehung. Der blau markierte Winkel beschreibt die noch erfolgende Drehung:



Da die 90° den 15 Minuten entsprechen folgt daraus:

$\dfrac{56,3^\circ}{90^\circ} \cdot 15 \approx 9,38$

Nun werden die $0,38$ noch in Sekunden umgerechnet:
$0,38 \cdot 60 = 22,8$

$\Rightarrow$ die Drehung benötigt noch 9 Minuten und $22,8$ Sekunden.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Die tiefste Stelle eines Schiffs bewegt sich im Modell auf der Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Beurteilen Sie anhand einer Rechnung, ob das Schiff das Sperrwerk passieren kann, wenn das Sperrtor geöffnet ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Koordinaten von Punkten ermitteln

Die tiefste Stelle des Schiffs lässt sich mit Hilfe des Allgemeinen Geraden Punkts angeben:

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17+\lambda \\ -8 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich, dass die tiefste Stelle des Schiffs bei einer Wassertiefe von $8m$ liegt.

Erläuterung:

Da die Wasseroberfläche durch die x_1x_2-Ebene dargestellt wird, beschreibt die x_3-Koordinate eines Punktes seine Tiefe im Wasser.

Abstand Punkt - Ebene

Die Tiefe des Sperrtors lässt sich durch den Abstand des Ursprungs, der Teil der x_1-Achse ist, zur Ebene E ermitteln.

$E : 2x_2 - 3x_3 - 26 = 0$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene

$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+4+9} = \sqrt{9} = \sqrt{13}$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$E^{\text{HNF}} : \dfrac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$E^{\text{HNF}} : \dfrac{1}{\sqrt{13}} (2x_2 - 3x_3 - 26) = 0$

Einsetzen des Ursprungs in die E^{HNF}:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{13}} \left(2 \cdot (0) - 3 \cdot (0) - 26\right) \right| = \left| \frac{-26}{\sqrt{13}} \right| \approx 7,21m$$

Da die tiefste Stelle des Schiffs bei $8m$ liegt und damit tiefer als die tiefste Stelle des Sperrtors mit $7,21m$, kann das Schiff das Sperrtor nicht passieren.