Abitur 2024 Mathematik Stochastik IV

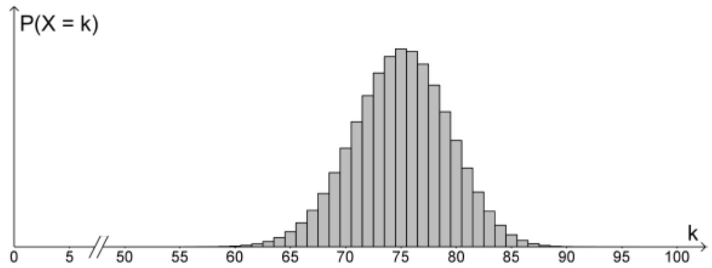
Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau“ , die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Person älter als 40 Jahre ist.

Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132; 133; ...; 200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0,047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 50 % betragen könnte.

Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Niclas beschließt, ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind.

- Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten.

Damit sind beispielsweise Nic4+las oder nNicl*as mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau“ , die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Standardabweichung einer Zufallsgröße

Bei einmaligem Drehen ist p die Wahrscheinlichkeit dafür „Blau“ zu erzielen, dann ist $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit dafür „Gelb“ zu erzielen.

Somit ist $\sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$ die Standardabweichung sowohl von X als auch für Y.

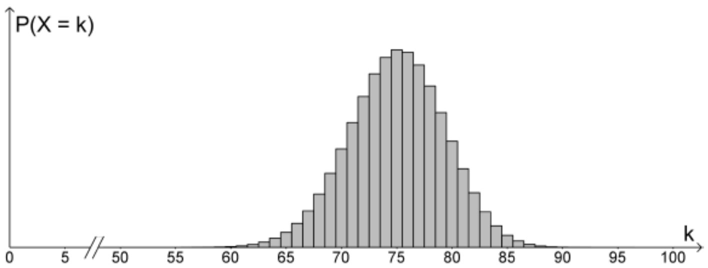
Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt für die Standardabweichung:

$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Wahrscheinlichkeit

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass 75 der Erwartungswert von X ist.

Ist b die Anzahl der blau eingefärbten Sektoren, so git:

$$75 = 100 \cdot \frac{b}{20}$$

$$\Rightarrow b = 15$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt:

$$E(X) = n \cdot p$$

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das

Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Baumdiagramm erstellen

A =„Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt.“

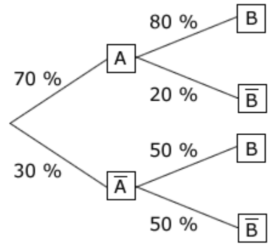
B =„Ein Abonnent hat das Komplettpaket gebucht.“

Aus dem Aufgabentext kann folgendes entnommen werden:

$$P(A) = 0,7$$

$$P_A(B) = 0,8$$

$$P_{\overline{A}}(K) = 0,5$$



Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 05} = 0,79$$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Person älter als 40 Jahre ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

" ... einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 99 % ist" $\Rightarrow$ $P \geq 0,99$

" ... **mindestens** eine Person älter als 40 Jahre ist" $\Rightarrow$ $X \geq 1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n (Anzahl der Personen älter als 40 Jahre) mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,3$ angesehen werden.

$P^n_{0,3}(X \geq 1) \geq 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P^n_p(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(\text{0 Treffer}) = P^n_p(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0,7^n \geq 0,99$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0,7^n \geq 0,99 \qquad | -1$

$-0,7^n \geq -0,01 \qquad | \cdot(-1)$

(da die Ungleichung mit einer negative Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$0,7^n \leq 0,01$

$0,7^n \leq 0,01$

Erläuterung: *Rechenweg*

$0,7^n \leq 0,01 \quad | \quad \ln()$

$\ln\,(0,7^n) \leq \ln(0,01)$

$n \cdot \ln(0,7) \leq \ln(0,01) \quad | \quad :\ln(0,7)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,7}$

$n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,7}$

$n \geq 12,9$

$n \Rightarrow$ kleinstmögliche Anzahl: 13

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Interpretation

Es soll möglichst vermieden werden, den Algorithmus dauerhaft einzusetzen, obwohl der Einsatz die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132; 133; ...; 200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0,047$

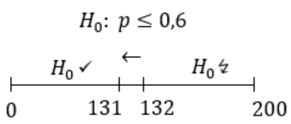
Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Hypothesentest - Entscheidungsregel

Es könnte eine natürliche Zahl k mit $k < 132$ geben, für die $P_{0,6}^{200}(Y \geq k) \leq 0,05$ gilt.

Erläuterung: *Hypothesentest, Fehler 1.Art*



Der Fehler liegt vor, wenn H_0 wahr ist, aber man sich gegen H_0 entscheidet.

Daher wird die Wahrscheinlichkeit aus der Nullhypothese verwendet und die Wahrscheinlichkeit bestimmt mit der Stichprobe im Ablehnungsbereich zu landen.

$P_{0,6}^{200}(Y \geq 131) = 1 - P_{0,6}^{200}(Y \leq 130) \overset{\text{TW}}{=} 0,064$

$\Rightarrow$ Somit ist 132 die untere Grenze des Ablehnungsbreichs.

Erläuterung: *Gegenereignis*

$P_p^n(X \geq k) = 1 - P_p^n(X \leq k-1)$

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 50 % betragen könnte.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

Beträgt der Anteil der zufriedenen Abonnenten beispielsweise $0,65$, dann trifft die Nullhypothese nicht zu und die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art beträgt:

$P_{0,65}^{200}(Y \leq 131) \overset{\text{TW}}{=} 0,58520$

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Kombinatorik

$\dfrac{(26)^8}{(80)^8} = 0,00012 < 0,001$

Erläuterung:

Es gibt insgesamt 26 Groß- und Kleinbuchstaben.

Es gibt insgesamt 80 verschiedene Zeichen.

Die Potenz gibt die Anzahl an verwendeten Zeichen an.

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Niclas beschließt, ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind.

- Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten.

Damit sind beispielsweise Nic4+las oder nNicl*as mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Kombinatorik

$\binom{8}{2} \cdot 74 \cdot 73 = 151256$

Erläuterung:

1. Positionen wählen $\Rightarrow$ Reihenfolge der Positionen nicht relevant:

$\Rightarrow \binom{8}{2}$

2. Möglichkeiten zwei unterschiedliche Zeichen zu wählen, die nicht im Namen „NICLAS“ vorkommen

$\Rightarrow 74 \cdot 73$