Abitur 2024 Mathematik Stochastik III

Bei einem Spiel wird ein Würfel einmal geworfen und ein Glücksrad einmal gedreht. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert. Das Glücksrad hat zehn gleich große Sektoren, die mit den Zahlen von 1 bis 10 durchnummeriert sind. Man gewinnt das Spiel, wenn die mit dem Glücksrad erzielte Zahl kleiner ist als die mit dem Würfel erzielte Zahl, andernfalls verliert man das Spiel.

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{4}$ beträgt.

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Das Spiel wird fünfmal gespielt. Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ berechnet werden kann.

In den letzten Jahren hat der Onlinehandel stark zugenommen. Dies zeigt sich auch in den Versandzentren der Paketdienstleister. Im Folgenden werden nur die im Zusammenhang mit dem Onlinehandel verschickten Pakete in einem dieser Versandzentren betrachtet. Ein Fünftel dieser Pakete sind Retouren, d.h. Pakete, die zurückgeschickte Waren enthalten.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 200 zufällig ausgewählten Paketen mehr als ein Viertel Retouren sind.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - \sum_{i=0}^{8} \binom{30}{i} \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{30-i}$ berechnet werden kann, und geben Sie dieses Ereignis an.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Pakete mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mindestens eine Retoure ist, größer als 90 % ist.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

49 % der Pakete enthalten Kleidung. Von den Paketen, bei denen es sich um Retouren handelt, enthalten 91 % Kleidung.
Es wird ein Paket zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
R: „Bei dem Paket handelt es sich um eine Retoure."
K: „Das Paket enthält Kleidung."

Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Bestimmen Sie für den Fall, dass das ausgewählte Paket keine Retoure ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Paket Kleidung enthält.

Aus einer Transportkiste mit 25 Paketen, unter denen sechs Retouren sind, werden nacheinander zehn Pakete zufällig entnommen und an eine Prüfstelle weitergeleitet.

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Pakete Retouren sind.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei oder drei Retouren entnommen werden.

Teilaufgabe Teil B 2 (4 BE)

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X, die nur die Werte 1, 2, 3, 4 und 5 annehmen kann.

k	1	2	3	4	5
P(X=k)	p_1	p_2	p_3	0,2	0,15

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X=4)$ und $P(X=5)$ sowie der Erwartungswert und die Varianz von X sind bekannt. Aus diesen Informationen ergibt sich das folgende Gleichungssystem, mit dem die fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 berechnet werden können.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & p_1 + p_2 + p_3 = 0,65 \\ \text{II} & p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1,45 \\ \text{III} & 4p_1 + p_2 = 0,6 \end{array}$$

Ermitteln Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, welche Werte für den Erwartungswert und die Varianz von X beim Aufstellen des Gleichungssystems verwendet worden sind.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Bei einem Spiel wird ein Würfel einmal geworfen und ein Glücksrad einmal gedreht. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert. Das Glücksrad hat zehn gleich große Sektoren, die mit den Zahlen von 1 bis 10 durchnummeriert sind. Man gewinnt das Spiel, wenn die mit dem Glücksrad erzielte Zahl kleiner ist als die mit dem Würfel erzielte Zahl, andernfalls verliert man das Spiel.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{4}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{10} =$$
$$= \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

Erläuterung:

Beim Glücksrad können die Zahlen $1-10$ gedreht werden. Beim Würfel kann keine größere Zahl als die 6 erzielt werden. Daher müssen beim Würfel nur die Zahlen $2-6$ und beim Glücksrad nur die Zahlen $1-5$ betrachtet werden:

Würfel (2) $\Rightarrow$ Glücksrad (1)

Würfel (3) $\Rightarrow$ Glücksrad $(1;2)$

Würfel (4) $\Rightarrow$ Glücksrad $(1;2;3)$

Würfel (5) $\Rightarrow$ Glücksrad $(1;2;3;4)$

Würfel (6) $\Rightarrow$ Glücksrad $(1;2;3;4;5)$

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Das Spiel wird fünfmal gespielt. Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$ berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Wahrscheinlichkeit

Das erste und das zweite Spiel werden gewonnen und die restlichen drei Spiele werden verloren.

Erläuterung:

Die Wahrscheinlichkeit ein Spiel zu gewinnen beträgt $\frac{1}{4}$.

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit ein Spiel zu verlieren $\frac{3}{4}$ beträgt.

Die Anzahl der durchgeführten Spiele sind am Exponenten erkennbar.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

In den letzten Jahren hat der Onlinehandel stark zugenommen. Dies zeigt sich auch in den Versandzentren der Paketdienstleister. Im Folgenden werden nur die im Zusammenhang mit dem Onlinehandel verschickten Pakete in einem dieser Versandzentren betrachtet. Ein Fünftel dieser Pakete sind Retouren, d.h. Pakete, die zurückgeschickte Waren enthalten.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 200 zufällig ausgewählten Paketen mehr als ein Viertel Retouren sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Binomialverteilung

$n = 200$

$p = 0,2$

$k > \frac{1}{4}\cdot 200 > 50$

$\Rightarrow P_{0,2}^{200}(X > 50) = 1 - P_{0,2}^{200}(X \leq 50) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 096550 = 0,0345$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Berechnung von mehr als k Treffern:

$P_p^n(X > k) = 1 - P_p^n(X \leq k)$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - \sum_{i=0}^{8} \binom{30}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{30-i}$ berechnet werden kann, und geben Sie dieses Ereignis an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Binomialverteilung

Es werden 30 Pakete zufällig ausgewählt. Dabei soll es sich um mindestens 9 Retouren handeln.

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Berechnung von mindestens k Treffern:

$P_p^n(X \geq k) = 1 - P_p^n(X \leq k-1)$

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Pakete mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mindestens eine Retoure ist, größer als 90 % ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ ... die Wahrscheinlichkeit dafür...**größer als** 90 % ist“ $\Rightarrow$ $P > 0{,}9$

“ ... dass darunter **mindestens** eine Retoure “ $\Rightarrow$ $X \geq 1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n (Anzahl Retouren) mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ angesehen werden.

$P_{0,2}^n(X \geq 1) > 0{,}9$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs P(mind. 1 Treffer) können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

P(mind. 1 Treffer) $= 1 - P$(kein Treffer)

$1 - P_{0,2}^n(X = 0) > 0{,}99$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0,8^n > 0,9$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0,8^n > 0,9 \qquad | -1$

$-0,8^n > -0,1 \qquad | \cdot(-1)$

(da die Ungleichung mit einer negative Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$0,8^n < 0,1$

$0,8^n < 0,1$

Erläuterung: *Rechenweg*

$0,8^n < 0,1 \quad | \quad \ln()$

$\ln\,(0,8^n) < \ln(0,1)$

$n \cdot \ln(0,8) < \ln(0,1) \quad | \quad : \ln(0,8)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8}$

$n > \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8}$

$n > 10,32$

$n \geq 11$ kleinster Wert

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

49 % der Pakete enthalten Kleidung. Von den Paketen, bei denen es sich um Retouren handelt, enthalten 91 % Kleidung.
Es wird ein Paket zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
R: „Bei dem Paket handelt es sich um eine Retoure."

K: „Das Paket enthält Kleidung."

Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Bestimmen Sie für den Fall, dass das ausgewählte Paket keine Retoure ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Paket Kleidung enthält.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Aus dem Text der Aufgabenstellung:

$P(K) = 0,49$

$P_R(K) = 0,91$

$P(R) = 0,2$

$P(R \cap K) = P(R) \cdot P_R(K) = 0,2 \cdot 0,91 = 0,182$

Erläuterung: *Schnittwahrscheinlichkeit*

Formel zur Berechnung der Schnittwahrscheinlichkeit:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

	$P(K)$	$P(\overline{K})$	
$P(R)$	0,182	0,018	0,2
$P(\overline{R})$	0,308	0,492	0,8
	0,49	0,51	1

$\Rightarrow P_{\overline{R}}(K) = \dfrac{P(\overline{R} \cap K)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0,308}{0,8} = 0,385$

Erläuterung: *Schnittwahrscheinlichkeit*

Formel zur Berechnung der Schnittwahrscheinlichkeit:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Aus einer Transportkiste mit 25 Paketen, unter denen sechs Retouren sind, werden nacheinander zehn Pakete zufällig entnommen und an eine Prüfstelle weitergeleitet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Pakete Retouren sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(E) = \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{20}$$

Erläuterung: *Ziehen ohne Zurücklegen*

Bei der Ziehung ohne Zurücklegen nimmt die Anzahl der Retouren und der gesamten Pakete je Ziehung um 1 ab:

25 Pakete $\Rightarrow$ 24 Pakete

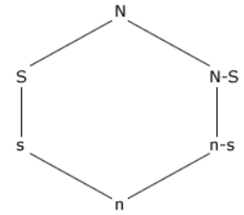
6 Retouren $\Rightarrow$ 5 Retouren

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei oder drei Retouren entnommen werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Ziehen ohne Zurücklegen



Anzahl der Ziehungen: 25

Anzahl der gezogenen Pakete: 10

Anzahl der Retouren: 6

Anzahl der zu ziehenden Retouren: 2 oder 3

Erläuterung: *Ziehen ohne Zurücklegen*

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Betrachtung der Reihenfolge, mit einem Griff gezogen. Dabei gibt s die Anzahl der schwarzen gezogen Kugeln an.

Die Wabe einfügen

$$\frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{19}{8}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{19}{7}}{\binom{25}{10}} = 0,6551$$

Teilaufgabe Teil B 2 (4 BE)

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X, die nur die Werte 1, 2, 3, 4 und 5 annehmen kann.

k	1	2	3	4	5
P(X=k)	p_1	p_2	p_3	0,2	0,15

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X=4)$ und $P(X=5)$ sowie der Erwartungswert und die Varianz von X sind bekannt. Aus diesen Informationen ergibt sich das folgende Gleichungssystem, mit dem die fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 berechnet werden können.

$$\begin{array}{cc} \text{I} & p_1+p_2+p_3=0,65 \\ \text{II} & p_1+2p_2+3p_3=1,45 \\ \text{III} & 4p_1+p_2=0,6 \end{array}$$

Ermitteln Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, welche Werte für den Erwartungswert und die Varianz von X beim Aufstellen des Gleichungssystems verwendet worden sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$E(X)=\underbrace{p_1+2p_2+3p_3}_{1,45}+0,8+0,75=3$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Formel zur Bestimmung des Erwartungswerts:

$$E(X)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+...+x_n\cdot p_n$$

$$Var(X)=(1-3)^2\cdot p_1+(2-3)^2\cdot p_2+(3-3)^2\cdot p_3+(4-2)^2\cdot 0,2+(5-3)^2\cdot 0,15=$$

$$=\underbrace{4p_1+p_2}_{0,6}+0,2+0,6=1,4$$

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

$$Var(X)=(x_1-E(X))^2\cdot p_1+(x_2-E(X))^2\cdot p_2+...+(x_n-E(X))^2\cdot p_n$$