Abitur 2024 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 9}{x + 2}$.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ sowie für $x \to +\infty$ an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = x^3 + x^2$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

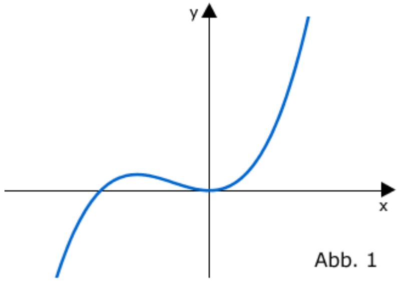


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von g an.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von g mit der x- Achse einschließt.

Gegeben ist die in $[-3; +\infty[$ definierte Funktion $h : x \mapsto \sqrt{x+3} - 2$.

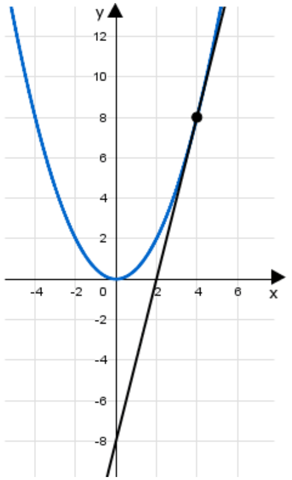
Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht.

Teilaufgabe Teil A 3b (4 BE)

Begründen Sie, dass h umkehrbar ist, und beschreiben Sie, wie der Graph der Umkehrfunktion h^{-1} von h aus dem Graphen von h hervorgeht.
Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich von h^{-1} an.

Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a\,x^2$. Abbildung 2 zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4|f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.



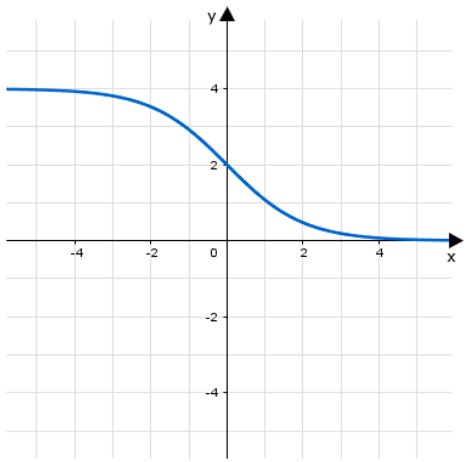
Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Geben Sie anhand von Abbildung 2 eine Gleichung der Tangente t an.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0|-f_a(u))$ schneidet.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto \dfrac{4}{1+e^x}$. Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Für die in $\mathbb{R}$ definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f'.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln(e^x + 1)$.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x-Achse.

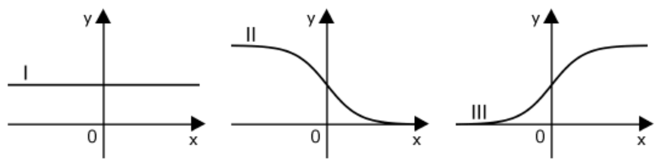
Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-k}^{k} f(x)\,\mathrm{dx}$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den Wert des Integrals an.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{\mathrm{a;b;c}} : x \mapsto \dfrac{a}{b + e^{c\,x}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b, zu einem der Werte $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$.



Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;\text{-}0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird. Es gilt also $w(x) = \frac{40}{1+e^{-0,2x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0|w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{a;b;c}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a, b und c.

(1) $\frac{a}{b+1} = 20$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{b+e^{c\,x}} = 45$ (3) $\frac{a}{b+e^{15c}} = 35$

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Ermitteln Sie die Werte von a und b.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{x^2-9}{x+2}$.

Geben Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f(x) = 0$

$\frac{x^2-9}{x+2} = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$\Rightarrow x_1 = -3$

$\Rightarrow x_2 = 3$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen einer Funktion f mit der $x-$Achse zu bestimmen lautet stets:

$f(x) = 0$

$f(0) = \frac{0^2-9}{0+2} = -4,5$

$\Rightarrow S(0|-4,5)$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Der Ansatz für den Schnittpunkt mit der $y-$Achse einer Funktion f zu berechnen lautet stets:

$f(0) =$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ sowie für $x \to +\infty$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^2-9}^{\to+\infty}}{\underbrace{x+2}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x-\frac{9}{x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{1+\frac{2}{x}}_{\to 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x-\frac{9}{x}}^{\to-\infty}}{\underbrace{1+\frac{2}{x}}_{\to 1}} = -\infty$$

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = x^3 + x^2$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

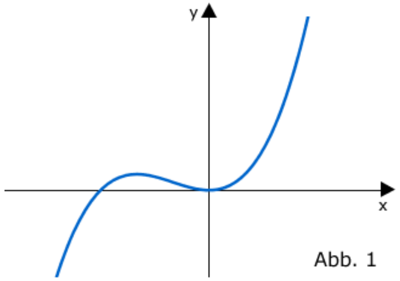


Abb. 1

Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$g'(x) = 3x^2 + 2x$

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von g mit der x- Achse einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Flächenberechnung

$g(x) = 0$

$x^3 + x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x+1)$

Erläuterung:

Ein Produkt $a \cdot b = 0$ ist immer dann null, wenn wenn $a = 0$ und/oder $b = 0$.

$x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$

$$\int_{-1}^{0} g(x)\ \mathrm{dx} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $x^3 + x^2$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\int_{-1}^{0} g(x)\ \mathrm{dx} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right] = -\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right] =$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{12}\ \mathrm{FE}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Gegeben ist die in $[-3; +\infty[$ definierte Funktion $h : x \mapsto \sqrt{x+3} - 2$.

Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Verschiebung von Funktionsgraphen

Der Graph von h geht aus dem Graphen von w hervor durch:

$\Rightarrow$ Verschiebung um 3 Einheiten in negative $x-$Richtung

$\Rightarrow$ Verschiebung um 2 Einheiten in negative $y-$Richtung

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

$f(x+c)+d$

c verschiebt den Funktionsgraphen in positiver und negativer $x-$Richtung:

$\Rightarrow +c$ um c Einheiten in negative $x-$Richtung

$\Rightarrow -c$ um c Einheiten in positive $x-$Richtung

d verschiebt den Funktionsgraphen in positiver und negativer $y-$Richtung:

$\Rightarrow +d$ um d Einheiten in positiver $y-$Richtung

$\Rightarrow -d$ um c Einheiten in negativer $y-$Richtung

Teilaufgabe Teil A 3b (4 BE)

Begründen Sie, dass h umkehrbar ist, und beschreiben Sie, wie der Graph der Umkehrfunktion h^{-1} von h aus dem Graphen von h hervorgeht.
Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich von h^{-1} an.

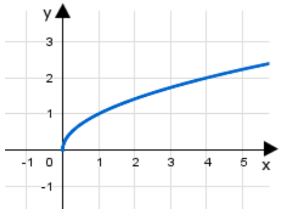
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Umkehrfunktion bestimmen

Da der Graph von h durch Verschiebung aus dem Graphen der Wurzelfunktion w hervorgeht, ist der Graph von h ebenso wie der Graph von w streng monoton steigend und somit umkehrbar.

Der Graph von h^{-1} geht aus dem Graphen von h durch Spiegelung an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ hervor.

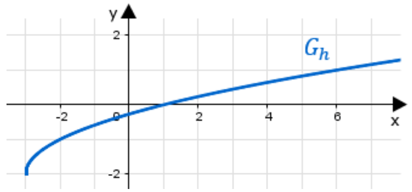
Erläuterung:



Definitionsbereich der Funktion $h^{-1}: [-2; +\infty[$

Wertebereich der Funktion $h^{-1}: [-3; +\infty[$

Erläuterung:



Der Definitionsbereich ist in der Aufgabenstellung angegeben und beschreibt alle $x-$Werte, die in die Funktion eingesetzt werden dürfen.

Der Wertebereich einer Funktion beschreibt alle $y-$Werte einer Funktion.

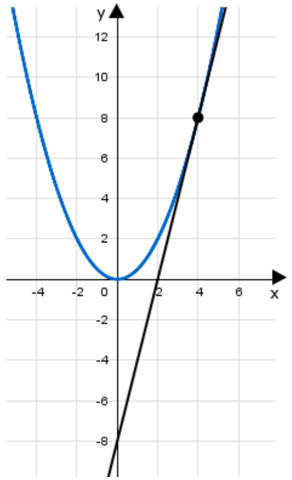
Dann gilt für die den Definitionsbereich und Wertebereich der Umkehrfunktion stets:

$D_f \Rightarrow W_{f^{-1}}$

$W_f \Rightarrow D_{f^{-1}}$

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a\,x^2$. Abbildung 2 zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4|f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.



Geben Sie anhand von Abbildung 2 eine Gleichung der Tangente t an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

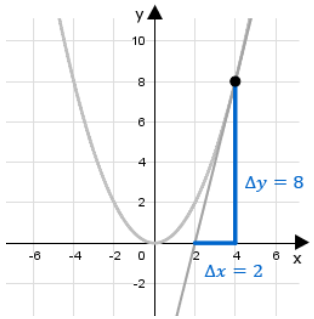
Tangentengleichung ermitteln

Die Gleichung einer Tangente lautet:

$t: y = m \cdot x + t$

Durch ein Steigungsdreieck erkennen wir, dass die Steigung $m = 4$.

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*



Steigung der Tangente:

$$\frac{8}{4-2} = 4 \Rightarrow m = 4$$

Da die Tangente t durch den Punkt $P(0|-8)$ verläuft, muss gelten:

$t(0) = -8$

$4 \cdot 0 + t = -8$

$\Rightarrow t = -8$

$t: y = 4x - 8$

Erläuterung:

Läuft der Graph einer Funktion f durch einen Punkt $P(x_0|y_0)$ so müssen die Koordinaten von P die Funktionsgleichung von P erfüllen:

$\Rightarrow f(x_0) = y_0$

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0|-f_a(u))$ schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f_a'(x) = 2a\,x$

$y = (x-u) \cdot f_a'(u) + f_a(u)$

$y = (x-u) \cdot 2a\,u + a\,u^2$

> Erläuterung: *Gleichung der Tangente*
>
> Die Tangente t einer Funktion f an einem Punkt $P(x_0|y_0)$ ist gegeben durch:
>
> $t: y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$

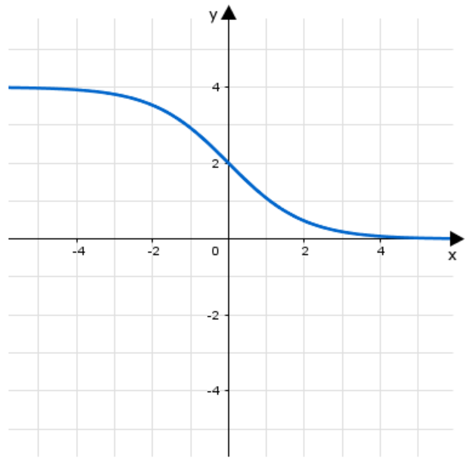
$t(0) = (0-u) \cdot 2a\,u + a\,u^2 = -a\,u^2 = -f_a(u)$

$\Rightarrow$ Somit schneidet die Tangente die $y-$Achse stets an im Punkt $(0|-f_a(u)$.

> Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*
>
> Ansatz für den Schnittpunkt mit der $y-$Achse:
>
> $f(0) =$

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \dfrac{4}{1+e^x}$. Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 0$

$\dfrac{4}{1+e^x} = 0$

$4 \neq 0$

$\Rightarrow$ Die Funktion f besitzt keine Nullstellen.

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Ansatz: $f(x) = 0$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{4}^{\to +4}}{\underbrace{1+e^x}_{\to +\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{4}^{\to+4}}{\underbrace{1+\underbrace{e^x}_{\to 0}}_{\to 1}} = 4$$

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Mittleren Änderungsrate bestimmen

Die mittlere Änderungsrate m im Bereich $[-1;1]$ ist gegeben durch:

$$m = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = -0,92$$

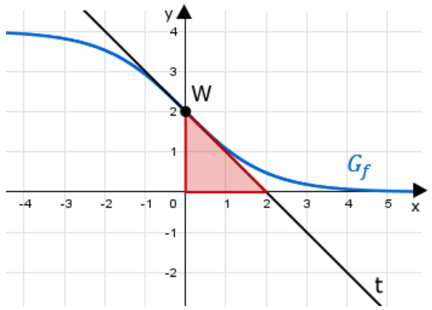
Erläuterung: *Mittlere Änderungsrate*

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $I=[a;b]$ ist gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $P_1(a|f(a))$ und $P_2(b|f(b))$.

Zur Berechnung gilt:

$$m_S = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Steigung eines Funktionsgraphen



Steigung des Graphen im Wendepunkt:

$$\Rightarrow m_t = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Für die in $\mathbb{R}$ definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f'.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Symmetrieverhalten einer Funktion

Der Graph von f' ist symmetrisch bezüglich der $y-$Achse.

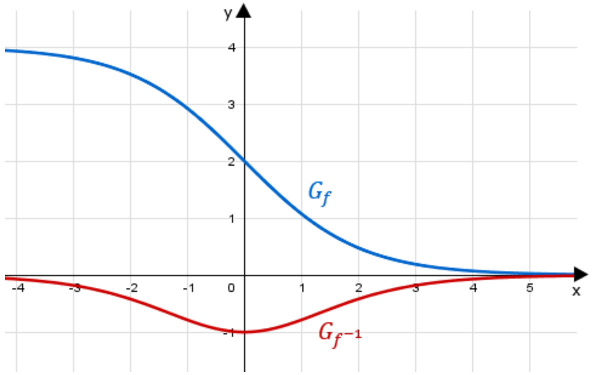
Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

Graph der Ableitungsfunktion



Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right)$.

Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Nachweis einer Stammfunktion

$$F'(x) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x =$$

Erläuterung: *Nachweis der Stammfunktion*

F ist eine Stammfunktion von f, wenn für alle x gilt:

$F'(x) = f(x)$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = e^x + 1$.
Dann ist $v'(x) = e^x$.

$$F'(x) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \frac{4 \cdot (e^x + 1)}{e^x + 1} - \frac{4e^x}{e^x + 1} =$$

$$= \frac{4e^x + 4 - 4e^x}{e^x + 1} = \frac{4}{e^x + 1} = f(x)$$

$\Rightarrow$ Somit ist F eine Stammfunktion von f

Erläuterung:

Bringe alle Elemente auf den Gleichen Nenner. Der Nenner ist in diesem Fall $e^x + 1$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x-Achse.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Verlauf der Funktion

Für alle x gilt:

$F(x) = 4x - 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right)$

Erläuterung:

Es gilt für alle x:

$e^x < e^x + 1$

Da die Funktion $g(x) = \ln x$ auf ihrem Definitionsbereich streng monoton steigend ist folgt daraus:

$g(e^x) < g(e^x + 1)$

$\ln(e^x) < \ln(e^x + 1)$

$-l\,n(e^x) > -\ln(e^x + 1)$

$F(x) < 4x - 4 \cdot \ln(e^x) = 4x - 4x = 0$

Erläuterung:

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln(e^x) = x$

$\Rightarrow$ Somit ist die Aussage richtig.

Erläuterung:

Die Funktion läuft unterhalb der $x-$Achse, da für alle x gilt:

$g(x) < 0$

$\Rightarrow$ Somit verläuft der Graph der Funktion unterhalb der $x-$Achse.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int\limits_{-k}^{k} f(x)\ \mathrm{dx}$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den

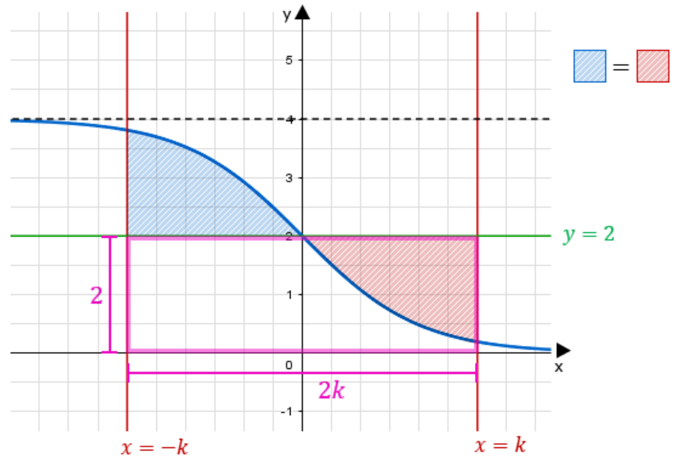
Wert des Integrals an.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f]

Bestimmtes Integral

Aus Symmetriegründen hat das Flächenstück, das im Bereich $[-k; 0]$ vom Graphen von f eingeschlossen wird den gleichen Flächeninhalt, wie das Flächenstück, das im Bereich $[0; k]$ vom Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung $x = k$ und $y = 2$ eingeschlossen wird.

Erläuterung:



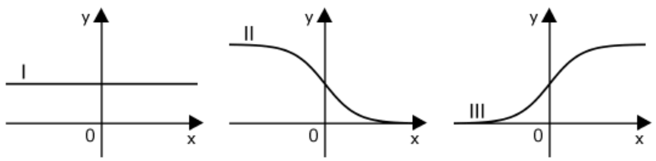
Somit ist der Wert des Integrals $\int\limits_{-k}^{k} f(x)\ \mathrm{dx}$ gleich mit Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $2k$ und 2.

$$\Rightarrow \int\limits_{-k}^{k} f(x)\ \mathrm{dx} = 2 \cdot 2k = 4k$$

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{\text{a;b;c}} : x \mapsto \dfrac{a}{b+e^{c\,x}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.

Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b, zu einem der Werte $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$.



Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionsgraphen einer Funktionsschar zuordnen

Für $c = 0$ ist $w_{\text{a;b;0}}(x) = \dfrac{a}{b+e^{c\cdot 0}} == \dfrac{a}{b+1}$

$\Rightarrow$ Somit folgt für alle reellen Zahlen ist $w_{a,b,0}$ eine konstante Funktion. Der entsprechende Graph ist somit I.

Für $c = 1$ ist $\underset{x\to+\infty}{lim} \dfrac{a}{\underbrace{b+e^x}_{\to+\infty}} = 0$

$\Rightarrow$ Somit ist der entsprechende Graph $I\,I$

$\Rightarrow$ Somit ist der Graph $I\,I\,I$, der Graph für $c = -1$

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;\text{-}0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird.

Es gilt also $w(x) = \dfrac{40}{1+e^{-0,2x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.

Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$$w(0) = \frac{40}{1+e^{-0,2\cdot 0}} = 20$$

$\Rightarrow$ Es wurden zu Beginn 20 Seeadler angesiedelt.

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Ansatz für den Schnittpunkt mit der $y-$Achse:

$f(0) =$

Funktionswert berechnen

$$w(x) = 32$$

$$\frac{40}{1+e^{-0,2x}} = 32$$

$$\frac{1+e^{-0,2x}}{40} = \frac{1}{32}$$

$$1+e^{-0,2x} = \frac{40}{32}$$

$$e^{-0,2x} = \frac{1}{4}$$

$$-0,2x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x = 6,95$$

$\Rightarrow$ Die Anzahl der Seeadler ist somit nach etwa sieben Jahren auf 32 angewachsen.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0|w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Funktionswert berechnen

$$w(4) = \frac{40}{1+e^{-0,2x}} = 27,6$$

Tangentengleichung ermitteln

Laut der Angabe gilt:

$w'(0) = 2 \Rightarrow m = 2$

Aus Teilaufgabe $2b)$ ist zudem bekannt:

$w(0) = 20 \Rightarrow t = 20$

Somit gilt:

$\Rightarrow y = 2x + 20$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Die Gleichung einer Tangente kann auch mit $y = m\,x + t$ angeben werden

$t(4) = 28$

$\Rightarrow$ Bei der Beschreibung der Entwicklung mithilfe der Tangente ergibt sich also in etwa die gleiche Anzahl.

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{\mathrm{a;b;c}}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a, b und c.

(1) $\dfrac{a}{b+1} = 20$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{b+e^{c\,x}} = 45$ (3) $\dfrac{a}{b+e^{15c}} = 35$

Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Begründung

(1) : $w_{a,b,c}(0) = 20$, das heißt es werden dort 20 Seeadler angesiedelt.

(2) : $\lim\limits_{x\to+\infty} w_{a,b,c} = 45$, das heißt langfristig werden laut dem Modell 45 Seeadler auf der Inselgruppe leben.

(3) : $w_{a,b,c} = 35$, das heißt nach 15 Jahren werden laut dem Modell 35 Seeadler auf der Inselgruppe leben.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Ermitteln Sie die Werte von a und b.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Parameterwerte ermitteln

Aus (1) und (2) folgt, dass $c < 0$ sein muss.

Erläuterung:

Wäre $c > 0$, so müsste gelten:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{b + \underbrace{e^{c\,x}}_{\to +\infty}} = 0$$

$\Rightarrow$ Das widerspricht Bedingung (2)

Wäre $c = 0$, so müsste geten:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{b + \underbrace{e^{c\,x}}_{\to 1}} = \frac{a}{b+1}$$

$\Rightarrow$ Wegen Bedingung (1) ist $\dfrac{a}{b+1} = 20$. Dies widerspricht Bedingung (2)

$\Rightarrow$ Somit kann nur $c < 0$ gelten.

Somit gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{b + \underbrace{e^{c\,x}}_{\to +\infty}} = 0$$

Aus Bedingung (2) folgt somit:

$$\frac{a}{b} = 45$$

$a = 45b$

Aus Bedingung (1) folgt dann:

$$\frac{45b}{b+1} = 20$$

$45b = 20b + 20$

$25b = 20$

$\Rightarrow b = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow a = 36$