Abitur 2024 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 8x^3 + 3x$ mit der Ableitungsfunktion f'.

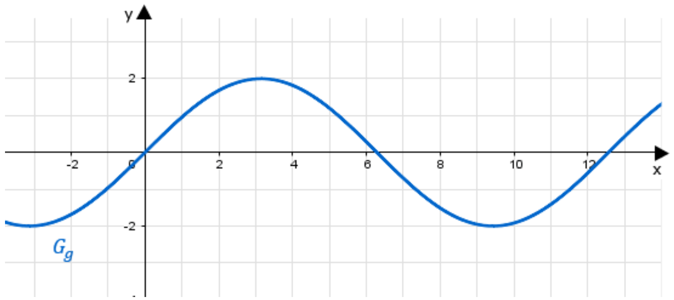
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Berechnen Sie $f'(1)$.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x$ negativ ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:
Die Tangente an G_g im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

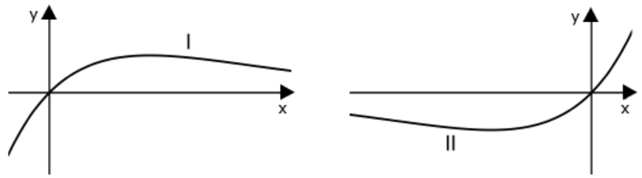
Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{a\,x}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a. Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



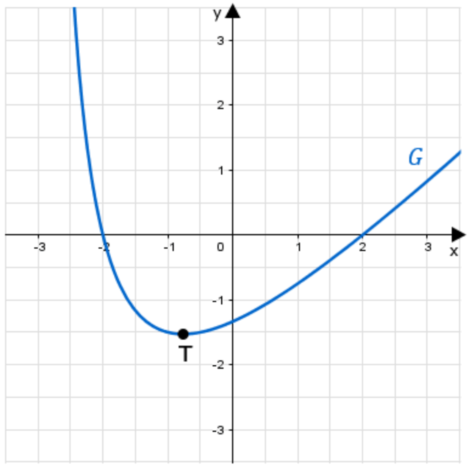
Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2; 4]$ hat.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h an, sodass der Term $\sqrt{h(x)}$ genau für $x \in [-2; 4]$ definiert ist. Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$. G hat genau einen Tiefpunkt T.



Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G. Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y-Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f, dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Weisen Sie nach, dass $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+3}$ gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x-Koordinate von T.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Betrachtet wird die in $]-3; +\infty[$ definierte Integralfunktion $J : x \mapsto \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Teilaufgabe Teil B 1f (6 BE)

Begründen Sie, dass die in $]-3; +\infty[$ definierte Funktion $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x+3)$ für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist.
Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{x \to -3} J(x) = -\infty$ gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{x^2-k}{x+3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = \dfrac{x^2+6x+k}{(x+3)^2}$.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Die Tangente an G_k im Punkt $(0|f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\frac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:
Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ auf t_k liegt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 8x^3 + 3x$ mit der Ableitungsfunktion f'.

Berechnen Sie $f'(1)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$f(x) = 8x^3 + 3x$

$f'(x) = 24x^2 + 3$

$f'(1) = 24 \cdot (1)^2 + 3 = 27$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Stammfunktion bestimmen

$F(x) = \int \left(8x^3 + 3x\right) \ \text{dx}$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $8x^3 + 3x$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(8x^3 + 3x\right) \, \mathrm{dx} = 8 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C$$

$$F(x) = 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$F(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Punktkoordinaten $(-1|5)$ müssen die Funktionsgleichung von F erfüllen.

$$F(-1) = 5$$

$$2 \cdot (-1)^4 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + C = 5$$

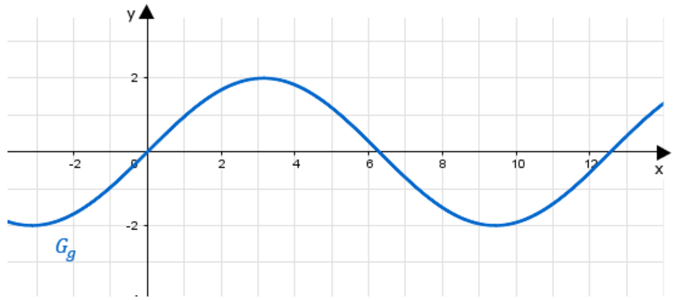
$$2 + \frac{3}{2} + C = 5$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

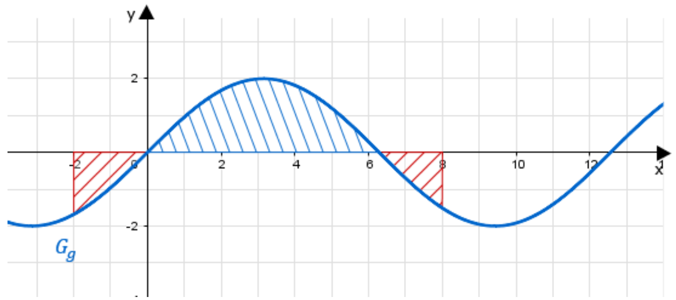
Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} g(x) \, \mathrm{dx}$ negativ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Flächenberechnung



Die Fläche, die der Graph von g mit der $x-$Achse in diesem Bereich einschließt, ist oberhalb der $x-$Achse größer als unterhalb.
Deswegen ist der Wert des Integrals positiv.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:
Die Tangente an G_g im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Tangentengleichung ermitteln

$$g'(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$\Rightarrow g'(0) = 1$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
>
> Hier ist $\quad v(x) = \frac{1}{2}x.$
>
> Dann ist $\quad v'(x) = \frac{1}{2}.$

$y = (x - 0) \cdot 1 + 0 = x$

Auf dem Graphen $y = x$ liegt sowohl der Punkt $(-1|-1)$ als auch der Punkt $(1|1)$

> Erläuterung: *Gleichung der Tangente*
>
> Formel für die Tangentengleichung:
>
> $t : y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{a\,x}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

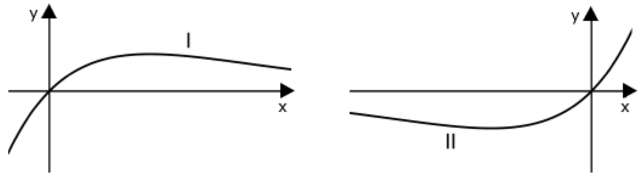
Verlauf der Funktion

$$f_a(x) = \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{a\,x}}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow$ Aus diesem Grund verläuft der Graph von f_a unterhalb der $x-$Achse

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a. Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Funktionsgraphen zuordnen

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{x\to\infty} \cdot \underbrace{e^{a\,x}}_{x\to\infty} = \infty$$

$\Rightarrow$ Der Graph I hat bereits einen Extrempunkt und würde für $x \to \infty$ fallen. Somit kann es nur Graph II sein.

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2; 4]$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Funktionsgleichung ermitteln

$g(x) = 3 \cdot \sin\,(x) + 1$

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h an, sodass der Term $\sqrt{h(x)}$ genau für $x \in [-2;4]$ definiert ist. Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Funktionsgleichung ermitteln

$h_1(x) = 9 - x^2$

$\sqrt{9-x^2} \Rightarrow D = [-3;3]$

Die Funktion h_1 muss noch um eine Einheit in positiver $x-$Richtung verschoben werden

$h(x) = 9 - (x-1)^2$

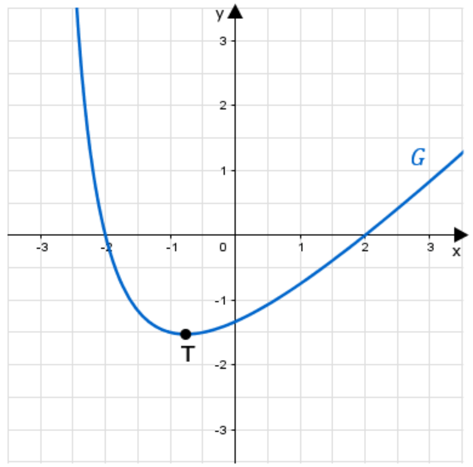
Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Verschiebung einer Funktion in $x-$Richtung:

$f(x+b)$ bedeutet um b Einheiten in negativer $x-$Richtung
$f(x-b)$ bedeutet um b Einheiten in positiver $x-$Richtung

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

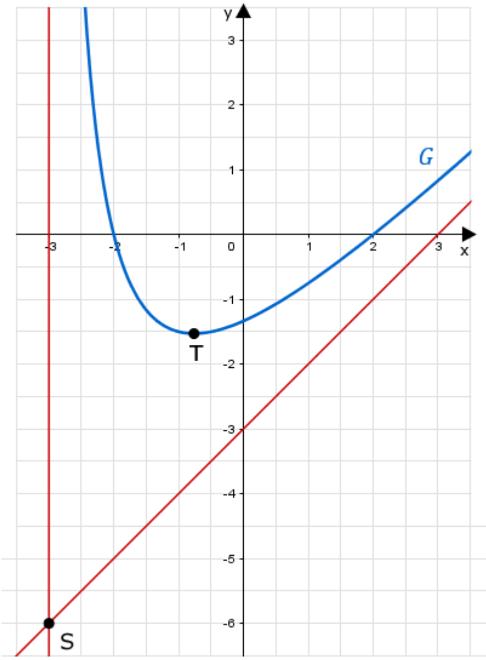
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$. G hat genau einen Tiefpunkt T.



Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G. Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Asymptoten einer Funktion



Erläuterung: *Schräge Asymptote*

Bei $f(x) = m \cdot x + t + \dfrac{a}{x+b}$ ist $y = m \cdot x + t$ die schräge Asymptote von G_f.

$x = -3$ ist die senkrechte Asymptote der Funktion f.

$y = x - 3$ ist die schräge Asymptote der Funktion f.

Die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Asymptoten der Funktion f liegt bei $S(-3|-6)$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y-Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f, dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$$f(0) = 0 - 3 + \frac{5}{0+3} = -\frac{4}{3}$$

$$S_y(0|-\frac{4}{3})$$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Ansatz für den Schnittpunkt mit der $y-$Achse:

$f(0) =$

$$f(x) = x - 3 + \underbrace{\frac{5}{x+3}}_{>0} > x - 3 \text{ für } x > -3$$

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Weisen Sie nach, dass $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+3}$ gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Termumformung

$$f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3} = \frac{x \cdot (x+3)}{x+3} - \frac{3 \cdot (x+3)}{x+3} + \frac{5}{x+3} =$$

$$= \frac{x^2 + 3x - 3x - 9 + 5}{x+3} = \frac{x^2-4}{x+3}$$

Erläuterung:

Bringe alle Elemente auf den Gleichen Nenner. Der Nenner ist in diesem Fall $x + 3$

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 0$

$\frac{x^2 - 4}{x+3} = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2$
$x_2 = 2$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der x-Achse*

Ansatz für den Schnittpunkt für die $x-$Achse:

$f(x) = 0$

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x-Koordinate von T.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+3) - (x^2 - 4)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - x^2 + 4}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x+3)^2}$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$f'(x) = 0$

$\frac{x^2 + 6x + 4}{(x+3)^2} = 0$

$x^2 + 6x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -3 + \sqrt{5}$
$\Rightarrow (x_2 = -3 - \sqrt{5})$

Erläuterung: *Extrempunkt*

Ansatz für die Bestimmung des Extremas:

$f'(x) = 0$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Bestimmtes Integral

$\Rightarrow$ 16 Kästchen unter der $x-$Achse

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{dx} = -4$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Schätze anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe a) den Inhalt der Fläche ab.

Teilaufgabe Teil B 1f (6 BE)

Betrachtet wird die in $]-3;+\infty[$ definierte Integralfunktion $J: x \mapsto \int\limits_{-2}^{x} f(t)\ \mathrm{dt}$.

Begründen Sie, dass die in $]-3;+\infty[$ definierte Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\cdot\ln(x+3)$ für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist.
Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{x\to -3} J(x) = -\infty$ gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Nachweis einer Stammfunktion

$$F'(x) = x - 3 + 5\cdot\frac{1}{x+3} = x - 3 + \frac{5}{x+3} = f(x)$$

Erläuterung:

Leite $F(x)$ ab und prüfe, ob $f(x)$ herauskommt.

Uneigentliches Integral

$$\int\limits_{-2}^{x} f(t)\ \mathrm{dt} = \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5\cdot\ln(t+3)\right]_{-2}^{x} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\cdot\ln(x+3) - [\frac{1}{2}(-2)^2 - 3\cdot(-2) + 5\cdot\ln(-2+3)] =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\cdot\ln(x+3) - 8$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\lim_{x\to -3} \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - 3x}_{\to 13{,}5} + \underbrace{5\cdot\ln(x+3)}_{\to -\infty} - 8 = -\infty$$

Das Flächenstück, das G_f, die $x-$Achse und die Gerade mit $x = -3$ begrenzt wird, erstreckt sich ins Unendliche und hat keinen endlichen Inhalt.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Eigenschaften der Integralfunktion

Die erste Nullstelle der Integralfunktion liegt beim Integrationsbeginn $x = -2$.

Die Fläche von $x = -2$ bis $x = 2$ liegt unterhalb der $x-$Achse, für $x > 2$ liegt die Fläche oberhalb der $x-$Achse und erstreckt sich ins Unendliche. Da G_f immer oberhalb der Asymptote $y = x - 3$ verläuft.
Daraus folgt, dass es eine weitere Nullstelle im Bereich $x > 2$ geben muss, da dann die Flächenbilanz ausgeglichen sein muss.

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Es gibt 3 Möglichkeiten, dass eine Integralfunktion null ist:

1) am Integrationsbeginn

2) obere Grenze des Integrals gleich untere Grenze des Integrals

3) ausgeglichene Flächenbilanz

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{x^2 - k}{x + 3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Nullstellen einer Funktion

$f_k(x) = 0$

$\dfrac{x^2 - k}{x + 3} = 0$

$x^2 - k = 0$

$x^2 = k$

$k < 0$: keine Nullstelle bei der Funktion f_k

$k = 0$: eine Nullstelle bei der Funktion f_k

$k > 0$: zwei Nullstellen bei der Funktion f_k

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Ansatz: $f(x) = 0$
>
> Hier muss zudem beachten werden, dass der Parameter negativ, null und positiv sein kann

$f_0(x) = 0$

$\dfrac{x^2}{x + 3} = 0$

$x^2 = 0$

$x_{1,2} = 0$ (doppelte Nullstelle)

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = \dfrac{x^2 + 6x + k}{(x + 3)^2}$.

Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Anzahl der Extrempunkte ermitteln

$f_k'(x) = 0$

$\dfrac{x^2 + 6x + k}{(x + 3)^2} = 0$

$x^2 + 6x + k = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$

> Erläuterung: *Extrempunkt*
>
> Ansatz ist $f'(x) = 0$ und dann ist zu prüfen, ob die Gleichung für $k > 9$ eine Lösung besitzt.

für $k > 9$: $36 - 4k < 0$

Damit gibt es keine Lösung für die Gleichung und somit auch kein Extrema bei G_{f_k} für $k > 9$.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Tangente an G_k im Punkt $(0|f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\dfrac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Steigung eines Funktionsgraphen

$$f_k'(0) = \frac{(0)^2 + 6 \cdot (0) + k}{((0)+3)^2} = \frac{k}{9}$$

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Um die Steigung an der Stelle x_0 zu ermitteln setzt man x_0 in die 1. Ableitung ein.

Nachweis der Gültigkeit einer gegebenen Beziehung

$$\frac{k}{9} \cdot 1 = -1$$

$$\frac{k}{9} = -1$$

$$k = -9$$

Erläuterung: *Senkrechte Geraden*

Bei senkrechten Geraden gilt stets:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:
Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ auf t_k liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Tangentengleichung ermitteln

$$f_k(0) = \frac{(0)^2 - k}{(0)+3} = -\frac{k}{3}$$

$$t_k : y = (x-0) \cdot \frac{k}{9} - \frac{k}{3} = \frac{k}{9} \cdot x - \frac{k}{3}$$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$$t : y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

k_1 ist ungleich k_2:

$$\frac{k_1}{9} \cdot x - \frac{k_1}{3} = \frac{k_2}{9} \cdot x - \frac{k_2}{3}$$

$$k_1 \cdot x - 3k_1 = k_2 \cdot x - 3k_2$$

$$k_1 \cdot x - k_2 \cdot x = 3k_1 - 3k_2$$

$$x \cdot (k_1 - k_2) = 3(k_1 - k_2)$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 0$$

Der Punkt $(3|0)$ liegt auf allen Tangenten t_k.