

Abitur 2024 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto 8x^3 + 3x$ mit der Ableitungsfunktion f' .

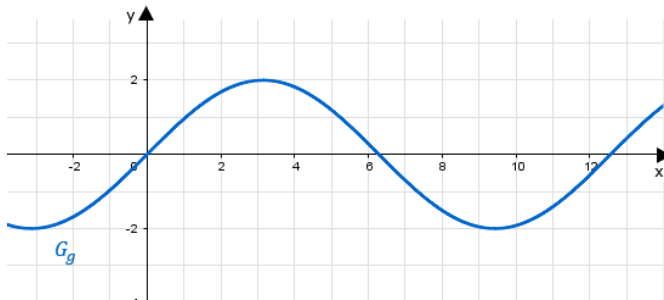
Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Berechnen Sie $f'(1)$.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f , deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der in \mathbb{R} definierten Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^8 g(x) \, dx$ negativ ist.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:

Die Tangente an G_g im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

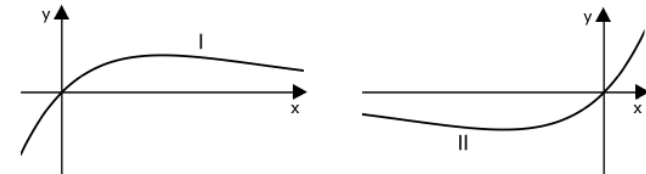
Betrachtet wird die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a . Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



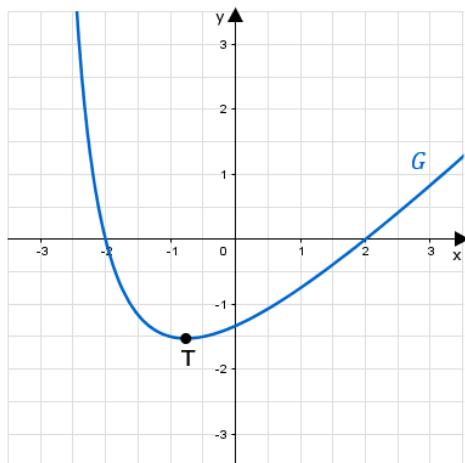
Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie einen Term einer in \mathbb{R} definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2; 4]$ hat.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer in \mathbb{R} definierten Funktion h an, sodass der Term $\sqrt{h(x)}$ genau für $x \in [-2; 4]$ definiert ist. Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3}$. G hat genau einen Tiefpunkt T .



Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G . Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y-Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f , dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Weisen Sie nach, dass $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$ gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \frac{5}{x + 3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x-Koordinate von T .

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

Betrachtet wird die in $] -3; +\infty[$ definierte Integralfunktion $J : x \mapsto \int_{-2}^x f(t) dt$.

Teilaufgabe Teil B 1f (6 BE)

Begründen Sie, dass die in $] -3; +\infty[$ definierte Funktion $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x + 3)$ für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist. Zeigen Sie damit, dass $\lim_{x \rightarrow -3} J(x) = -\infty$ gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{x^2 - k}{x + 3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f'_k(x) = \frac{x^2 + 6x + k}{(x + 3)^2}$.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Die Tangente an G_k im Punkt $(0|f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\frac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k , für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:
Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ auf t_k liegt.

Lösung**Teilaufgabe Teil A 1a** (2 BE)

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto 8x^3 + 3x$ mit der Ableitungsfunktion f' .

Berechnen Sie $f'(1)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$f(x) = 8x^3 + 3x$$

$$f'(x) = 24x^2 + 3$$

$$f'(1) = 24 \cdot (1)^2 + 3 = 27$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f , deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Stammfunktion bestimmen

$$F(x) = \int (8x^3 + 3x) \, dx$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $8x^3 + 3x$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \int (8x^3 + 3x) dx = 8 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C$$

$$F(x) = 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$F(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Punktkoordinaten $(-1|5)$ müssen die Funktionsgleichung von F erfüllen.

$$F(-1) = 5$$

$$2 \cdot (-1)^4 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + C = 5$$

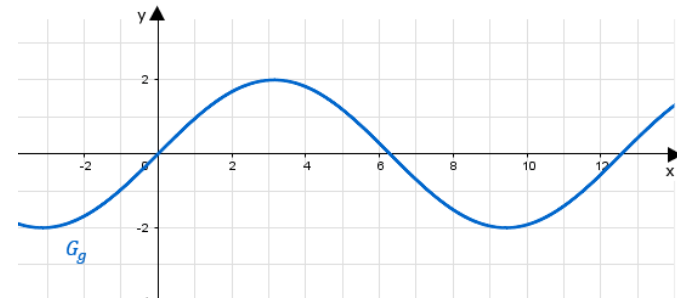
$$2 + \frac{3}{2} + C = 5$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

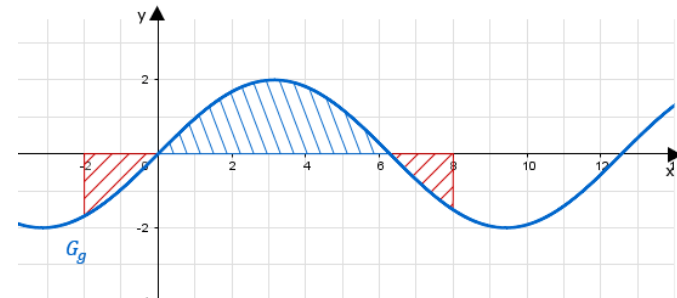
Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der in \mathbb{R} definierten Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^8 g(x) dx$ negativ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Flächenberechnung



Die Fläche, die der Graph von g mit der x -Achse in diesem Bereich einschließt, ist oberhalb der x -Achse größer als unterhalb.

Deswegen ist der Wert des Integrals positiv.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:

Die Tangente an G_g im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b**Tangentengleichung ermitteln**

$$g'(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow g'(0) = 1$$

Erläuterung: Kettenregel der Differenzialrechnung

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Hier ist $v(x) = \frac{1}{2}x$.

Dann ist $v'(x) = \frac{1}{2}$.

$$y = (x - 0) \cdot 1 + 0 = x$$

Auf dem Graphen $y = x$ liegt sowohl der Punkt $(-1 | -1)$ als auch der Punkt $(1 | 1)$

Erläuterung: Gleichung der Tangente

Formel für die Tangentengleichung:

$$t : y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Betrachtet wird die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

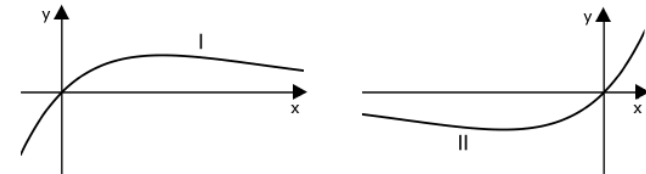
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a**Verlauf der Funktion**

$$f_a(x) = \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{>0} < 0$$

\Rightarrow Aus diesem Grund verläuft der Graph von f_a unterhalb der x -Achse

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a . Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b**Funktionsgraphen zuordnen**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x}_{x \rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{x \rightarrow \infty} = \infty$$

\Rightarrow Der Graph I hat bereits einen Extrempunkt und würde für $x \rightarrow \infty$ fallen. Somit kann es nur Graph II sein.

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie einen Term einer in \mathbb{R} definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2; 4]$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a**Funktionsgleichung ermitteln**

$$g(x) = 3 \cdot \sin(x) + 1$$

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer in \mathbb{R} definierten Funktion h an, sodass der Term $\sqrt{h(x)}$ genau für $x \in [-2; 4]$ definiert ist. Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b**Funktionsgleichung ermitteln**

$$h_1(x) = 9 - x^2$$

$$\sqrt{9 - x^2} \Rightarrow D = [-3; 3]$$

Die Funktion h_1 muss noch um eine Einheit in positiver x -Richtung verschoben werden

$$h(x) = 9 - (x - 1)^2$$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

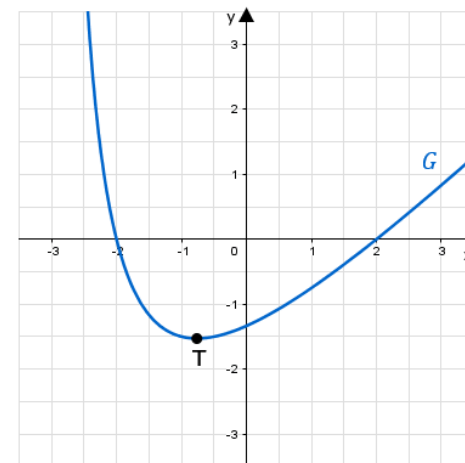
Verschiebung einer Funktion in x -Richtung:

$f(x + b)$ bedeutet um b Einheiten in negativer x -Richtung

$f(x - b)$ bedeutet um b Einheiten in positiver x -Richtung

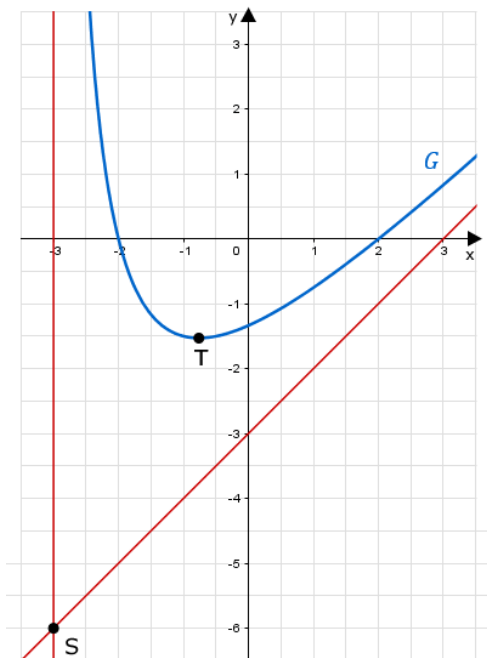
Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3}$. G hat genau einen Tiefpunkt T .



Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G . Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a**Asymptoten einer Funktion**



Erläuterung: *Schräge Asymptote*

Bei $f(x) = m \cdot x + t + \frac{a}{x+b}$ ist $y = m \cdot x + t$ die schräge Asymptote von G_f .

$x = -3$ ist die senkrechte Asymptote der Funktion f .

$y = x - 3$ ist die schräge Asymptote der Funktion f .

Die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Asymptoten der Funktion f liegt bei $S(-3 | -6)$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y -Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f , dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$$f(0) = 0 - 3 + \frac{5}{0+3} = -\frac{4}{3}$$

$$S_y(0 | -\frac{4}{3})$$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Ansatz für den Schnittpunkt mit der y -Achse:

$$f(0) =$$

$$f(x) = x - 3 + \underbrace{\frac{5}{x+3}}_{>0} > x - 3 \text{ für } x > -3$$

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Weisen Sie nach, dass $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$ gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \frac{5}{x + 3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Termumformung

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 3 + \frac{5}{x+3} = \frac{x \cdot (x+3)}{x+3} - \frac{3 \cdot (x+3)}{x+3} + \frac{5}{x+3} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - 3x - 9 + 5}{x+3} = \frac{x^2 - 4}{x+3} \end{aligned}$$

Erläuterung:

Bringe alle Elemente auf den gleichen Nenner. Der Nenner ist in diesem Fall $x + 3$

Nullstellen einer Funktion

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 2$$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der x-Achse*

Ansatz für den Schnittpunkt für die x -Achse:

$$f(x) = 0$$

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x -Koordinate von T .

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 3) - (x^2 - 4)}{(x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - x^2 + 4}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2} = 0$$

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x_2 = -3 - \sqrt{5})$$

Erläuterung: *Extrempunkt*

Ansatz für die Bestimmung des Extremas:

$$f'(x) = 0$$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Bestimmtes Integral

\Rightarrow 16 Kästchen unter der x -Achse

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = -4$$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Schätze anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe a) den Inhalt der Fläche ab.

Teilaufgabe Teil B 1f (6 BE)

Betrachtet wird die in $] - 3; +\infty[$ definierte Integralfunktion $J : x \mapsto \int_{-2}^x f(t) dt$.

Begründen Sie, dass die in $] - 3; +\infty[$ definierte Funktion $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x + 3)$ für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist.

Zeigen Sie damit, dass $\lim_{x \rightarrow -3} J(x) = -\infty$ gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Nachweis einer Stammfunktion

$$F'(x) = x - 3 + 5 \cdot \frac{1}{x + 3} = x - 3 + \frac{5}{x + 3} = f(x)$$

Erläuterung:

Leite $F(x)$ ab und prüfe, ob $f(x)$ herauskommt.

Uneigentliches Integral

$$\begin{aligned} \int_{-2}^x f(t) dt &= \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5 \cdot \ln(t + 3) \right]_{-2}^x = \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x + 3) - \left[\frac{1}{2}(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot \ln(-2 + 3) \right] = \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x + 3) - 8 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - 3x}_{\rightarrow 13,5} + \underbrace{5 \cdot \ln(x + 3)}_{\rightarrow -\infty} - 8 = -\infty$$

Das Flächenstück, das G_f , die x -Achse und die Gerade mit $x = -3$ begrenzt wird, erstreckt sich ins Unendliche und hat keinen endlichen Inhalt.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Eigenschaften der Integralfunktion

Die erste Nullstelle der Integralfunktion liegt beim Integrationsbeginn $x = -2$.

Die Fläche von $x = -2$ bis $x = 2$ liegt unterhalb der x -Achse, für $x > 2$ liegt die Fläche oberhalb der x -Achse und erstreckt sich ins Unendliche. Da G_f immer oberhalb der Asymptote $y = x - 3$ verläuft.

Daraus folgt, dass es eine weitere Nullstelle im Bereich $x > 2$ geben muss, da dann die Flächenbilanz ausgeglichen sein muss.

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Es gibt 3 Möglichkeiten, dass eine Integralfunktion null ist:

- 1) am Integrationsbeginn
- 2) obere Grenze des Integrals gleich untere Grenze des Integrals
- 3) ausgeglichene Flächenbilanz

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{x^2 - k}{x + 3}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a**Nullstellen einer Funktion**

$$f_k(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - k}{x + 3} = 0$$

$$x^2 - k = 0$$

$$x^2 = k$$

$k < 0$: keine Nullstelle bei der Funktion f_k

$k = 0$: eine Nullstelle bei der Funktion f_k

$k > 0$: zwei Nullstellen bei der Funktion f_k

Erläuterung: *Nullstellen*

Ansatz: $f(x) = 0$

Hier muss zudem beachten werden, dass der Parameter negativ, null und positiv sein kann

$$f_0(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{x + 3} = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f'_k(x) = \frac{x^2 + 6x + k}{(x + 3)^2}$.

Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b**Anzahl der Extrempunkte ermitteln**

$$f'_k(x) = 0$$

$$\frac{x^2 + 6x + k}{(x + 3)^2} = 0$$

$$x^2 + 6x + k = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

Erläuterung: *Extrempunkt*

Ansatz ist $f'(x) = 0$ und dann ist zu prüfen, ob die Gleichung für $k > 9$ eine Lösung besitzt.

$$\text{für } k > 9: 36 - 4k < 0$$

Damit gibt es keine Lösung für die Gleichung und somit auch kein Extrema bei G_{f_k} für $k > 9$.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die Tangente an G_k im Punkt $(0|f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\frac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k , für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Steigung eines Funktionsgraphen

$$f'_k(0) = \frac{(0)^2 + 6 \cdot (0) + k}{((0) + 3)^2} = \frac{k}{9}$$

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Um die Steigung an der Stelle x_0 zu ermitteln setzt man x_0 in die 1. Ableitung ein.

Nachweis der Gültigkeit einer gegebenen Beziehung

$$\frac{k}{9} \cdot 1 = -1$$

$$\frac{k}{9} = -1$$

$$k = -9$$

Erläuterung: *Senkrechte Geraden*

Bei senkrechten Geraden gilt stets:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:

Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ auf t_k liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d**Tangentengleichung ermitteln**

$$f_k(0) = \frac{(0)^2 - k}{(0) + 3} = -\frac{k}{3}$$

$$t_k : y = (x - 0) \cdot \frac{k}{9} - \frac{k}{3} = \frac{k}{9} \cdot x - \frac{k}{3}$$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$$t : y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

k_1 ist ungleich k_2 :

$$\frac{k_1}{9} \cdot x - \frac{k_1}{3} = \frac{k_2}{9} \cdot x - \frac{k_2}{3}$$

$$k_1 \cdot x - 3k_1 = k_2 \cdot x - 3k_2$$

$$k_1 \cdot x - k_2 \cdot x = 3k_1 - 3k_2$$

$$x \cdot (k_1 - k_2) = 3(k_1 - k_2)$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 0$$

Der Punkt (3|0) liegt auf allen Tangenten t_k .