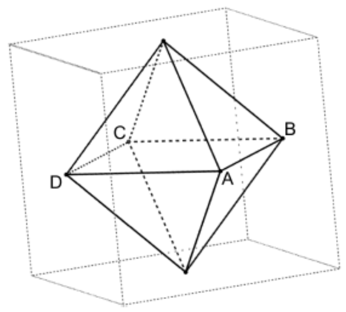
Abitur 2024 Mathematik Geometrie VI

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung).
Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.



Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

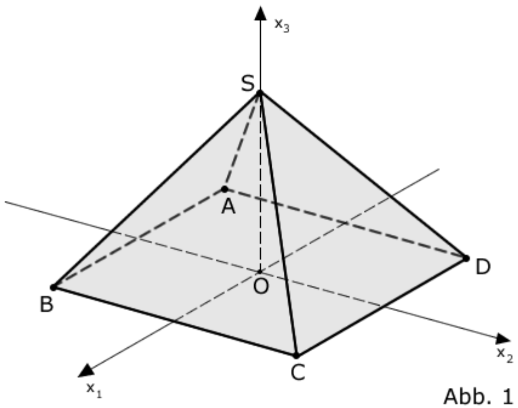


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\text{I} \quad \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{II} \quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) - 12 = 0 \qquad \text{III} \quad \left|\overrightarrow{\text{PQ}}\right| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k : 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1 - k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$ mit $k \in [-1; 1]$.

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

Teilaufgabe Teil B e (1 BE)

Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die $x_1 x_2$-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

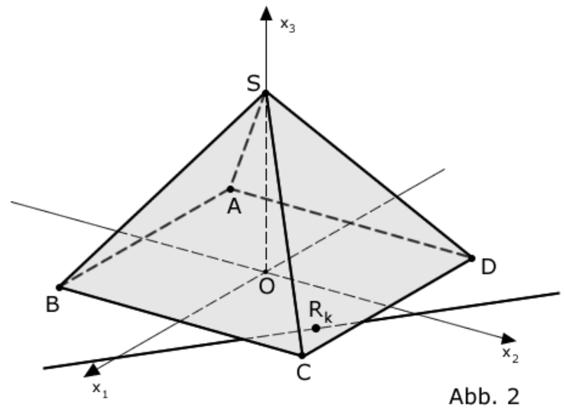


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein.

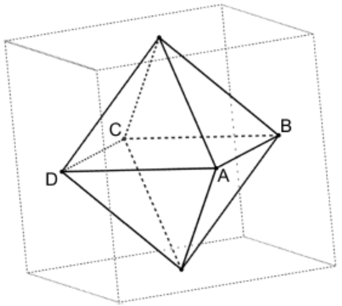
Teilaufgabe Teil B h (3 BE)

Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich das Dreieck OR_kS um die Strecke [OS]. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung).
Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.



Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

2-dimensionale Geometrie

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Erläuterung:

Die Strecke der Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels entspricht der Kantenlänge des Würfels.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Koordinaten von Punkten ermitteln

$$\overrightarrow{M_{AC}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_{AC}(-1|-2|5)$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{M_{AC}} + 2 \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E(3|0|9)$

Alternativ:

$\overrightarrow{M_{AC}} - 2 \cdot \overrightarrow{n_E}$

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

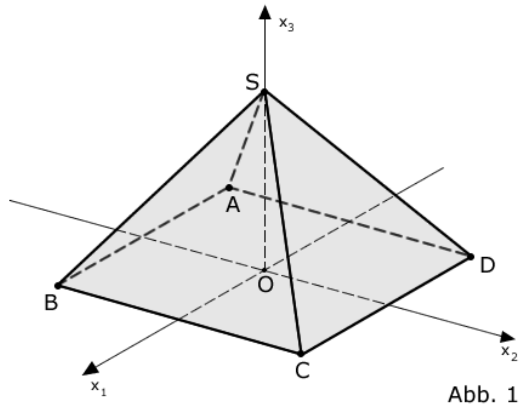


Abb. 1

Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Oberfläche einer Pyramide

Aus den Koordinaten der Eckpunkte der Grundseite folgt:

$\Rightarrow G = 6 \cdot 6 = 36$ FE

Die Dreiecke der Seiten:

$\Rightarrow$ Länge der Grundeite 6 LE

$\Rightarrow$ Höhe des Dreiecks $h^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow h = 5$ LE

Oberfläche der Pramide:

$\Rightarrow O_P = 36 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 96$ FE

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der

Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Symmetrieebene

Prüfe ob S teil der Ebene ist:

$(1) : 0 - 4 \neq 0$ S ist nicht teil von (1)

$(2) : 0 + 0 + 4 = 4$ S ist teil von (2)

$(3) : 0 + 0 = 0$ S ist teil von (3)

Prüfe, ob der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ passt:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 6 \cdot \overrightarrow{n_E}$

$\Rightarrow$ (2) ist keine Symmetrieebene
$\Rightarrow$ (2) ist eine Symmetrieebene

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Ebenengleichung in Normalenform

$$\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SC}} \times \overrightarrow{\mathrm{SD}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\dfrac{1}{6}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E\colon \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (P ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$E\colon 4x_2 + 3x_3 = 0 + 0 + 12$

$E\colon 4x_2 + 3x_3 = 12$

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

I $\quad \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix}0\\0\\p\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \qquad$ II $\quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) - 12 = 0 \qquad$ III $\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Begründung

I.: Q ist Teil des Lots von P auf die Ebene E.

II.: Da die Gleichung erfüllt ist, ist Q der Lotfußpunkt.

III.: Der Abstand von P zu Q entspricht dem Abstand von P zu E. Dieser Abstand zu E entspricht dem Abstand von P zur Grundseite, da dieser mit der x_3-Koordinate von P übereinstimmt.

Teilaufgabe Teil B e (1 BE)

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$ mit $k \in [-1; 1]$.

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Lage eines Punktes

S in E_K:

$4k \cdot 0 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 12 = 0$ (wahre Aussage)

$\Rightarrow S$ liegt in E_k

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Winkel zwischen Gerade und Ebene

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

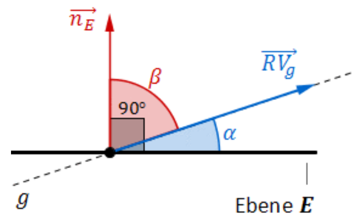
$$\overrightarrow{n_{E_k}} = \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}, \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0+0+12}{\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{16k^2 + 16 \cdot (1-k^2) + 9}} =$$

$$= \frac{12}{4 \cdot \sqrt{16k^2 + 16 - 16k^2 + 9}} = \frac{12}{4 \cdot \sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow$ der Winkel ist unabhängig von k

Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*



Der **Sinus** des Winkels α zwischen einer Geraden g und einer Ebenen E ist gegeben durch:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}\right|}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

wobei $\overrightarrow{RV_g}$ der Richtungsvektor der Geraden und $\overrightarrow{n_E}$ der Normalenvektor der Ebene ist.

(Anmerkung: Man verwendet die Formel gerne ohne Betragsstriche im Zähler; also $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$.
Aber mit Betragsstrichen wird <u>immer</u> der spitze Winkel bestimmt.)

Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

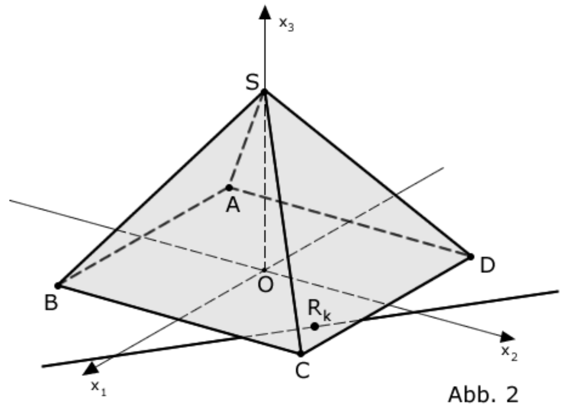


Abb. 2

Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Spurpunkte einer Ebene

R_1 ist der Schnittpunkt mit der x_1-Achse der Ebene $E_1 \Rightarrow R_1(3|0|0)$

R_{-1} ist der Schnittpunkt mit der x_1-Achse der Ebene $E_{-1} \Rightarrow R_{-1}(-3|0|0)$

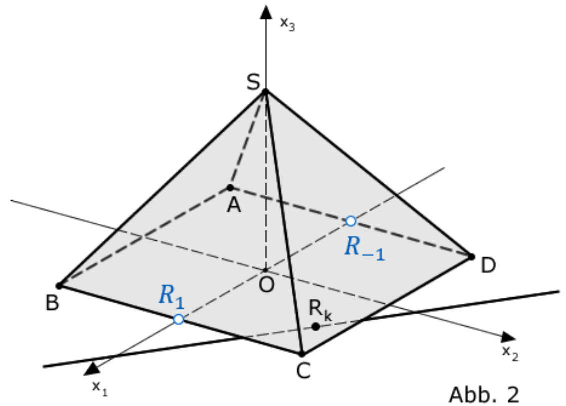


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B h (3 BE)

Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich das Dreieck OR$_k$S um die Strecke [OS]. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B h

Rotationskörper

Es entsteht ein halber Kegel.

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4\right) = 6\pi \text{ VE}$$