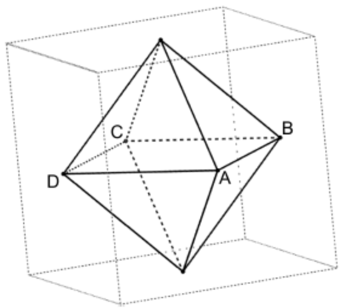
Abitur 2024 Mathematik Geometrie V

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung).
Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.



Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Gegeben sind die Punkte $A(8|0|6)$, $B(7|1|6)$ und $S(0|0|10)$, die in der Ebene E liegen.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Berechnen Sie die Länge der Strecke [AB] und geben Sie die besondere Lage dieser Strecke im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $\overline{\text{AB}} = \sqrt{2}$)

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $E : x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$)

Betrachtet werden die Schar der Geraden $g_k : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $C(9|1|5)$.

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

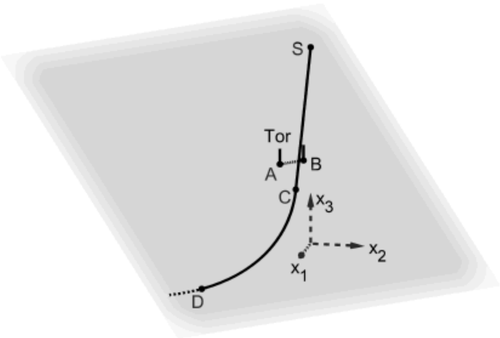
Begründen Sie, dass jede Gerade der Schar in E liegt, und bestimmen Sie denjenigen Wert k, für den der Punkt C auf g_k liegt.

(zur Kontrolle: $k = 0,8$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Begründen Sie, dass die Größe des Schnittwinkels von g_k und der x_1x_2-Ebene weniger als 30° beträgt, wenn $2k^2 > 1$ gilt.

Eine Skifahrerin fährt einen Hang hinab. Dieser wird modellhaft durch ein Flächenstück beschrieben, das in der Ebene E liegt. Die Startposition der Abfahrt entspricht dem Punkt S. Auf dem Hang befindet sich ein Tor, dessen Begrenzungsstangen im Modell an den Punkten A und B stehen. Von ihrer Startposition fährt die Skifahrerin zunächst entlang einer geraden Fahrlinie bis zu einer Stelle unterhalb des Tors, die dem Punkt C entspricht (vgl. Abbildung).



Die gerade Fahrlinie liegt dabei im Modell auf der Gerade $g_{0,8}: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die $x_1 x_2$-Ebene beschreibt die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 5 Metern in der Realität.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Geben Sie mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe a die Breite des Tors auf Meter genau an. Begründen Sie mithilfe der Aussage aus Aufgabe d, dass die gerade Fahrlinie der Skifahrerin um weniger als 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Begründen Sie rechnerisch, dass die Skifahrerin das Tor tatsächlich durchquert.

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

An der Stelle, die im Modell dem Punkt C entspricht, wird die Fahrlinie der Skifahrerin ohne Knick durch eine kreisbogenförmige Kurve fortgesetzt.
Während der Fahrt entlang dieser Kurve erreicht die Skifahrerin eine Stelle, die dem Punkt $D(18|-2|2)$ entspricht.
Der Kreisbogen, der diese Kurve beschreibt, ist Teil eines Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$.
Die Koordinaten von M können mit folgendem Gleichungssystem ermittelt werden.

I $\quad m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$

II $\quad \begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

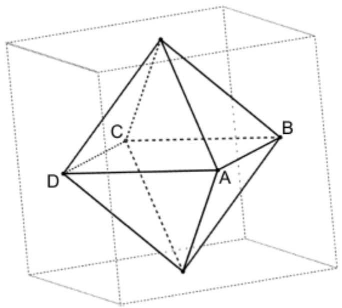
III $\quad \sqrt{(m_1-9)^2 + (m_2-1)^2 + (m_3-5)^2} = \sqrt{(m_1-18)^2 + (m_2+2)^2 + (m_3-2)^2}$

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die den Gleichungen I, II und III zugrunde liegen.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung).
Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0$.



Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

2-dimensionale Geometrie

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Erläuterung:

Die Strecke der Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels entspricht der Kantenlänge des Würfels.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Koordinaten von Punkten ermitteln

$$\overrightarrow{M_{A\,C}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_{A\,C}(-1|-2|5)$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{M_{AC}} + 2 \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E(3|0|9)$

Alternativ:

$\overrightarrow{M_{AC}} - 2 \cdot \overrightarrow{n_E}$

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(8|0|6)$, $B(7|1|6)$ und $S(0|0|10)$, die in der Ebene E liegen.

Berechnen Sie die Länge der Strecke [AB] und geben Sie die besondere Lage dieser Strecke im Koordinatensystem an.

(zur Kontrolle: $\overline{\text{AB}} = \sqrt{2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Länge einer Strecke

$$\left|\overrightarrow{\text{AB}}\right| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Besondere Lage im Koordinatensystem

Die Strecke $[A\,B]$ ist parallel zur $x_1\,x_2-$Ebene

Erläuterung:

Da die x_3-Koordinate bei beiden Punkten 6 ist, liegen beide Punkte auf der gleichen Höhe. Somit verläuft der Vektor parallel zur $x_1\,x_2-$Ebene.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebenengleichung in Normalenform

$$\overrightarrow{A\,B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A\,S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{4}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

E: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (P ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 + 0 + 12$

E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Betrachtet werden die Schar der Geraden $g_k : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $C(9|1|5)$.

Begründen Sie, dass jede Gerade der Schar in E liegt, und bestimmen Sie denjenigen Wert k, für den der Punkt C auf g_k liegt.

(zur Kontrolle: $k = 0,8$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ebene E und Gerade g schneiden: $\quad E \cap g$

$$\begin{aligned} E \cap g: \quad \lambda \cdot (1+k) + \lambda \cdot (1-k) + 2 \cdot (10-\lambda) &= 20 \\ \lambda + \lambda k + \lambda - \lambda k + 20 - 2\lambda &= 20 \\ 20 &= 20 \quad \text{(wahre Aussage)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_k$ liegt in E

Erläuterung: *Lagebeziehung von Ebene und Gerade*

Mögliche Lagen einer Gerade zu einer Ebene:
enthalten, parallel, Schnitt (Schnittpunkt)

Überprüfung: Ebene und Gerade scheiden.

Möglichkeiten:

Parameter bleibt stehen (z.B. $\lambda = 1$) $\Rightarrow$ **Schnittpunkt**

Parameter fällt weg und die Aussage ist wahr (z.B. $0 = 0$)
$\Rightarrow$ Gerade ist in der Ebene **enthalten**

Parameter fällt weg und die Aussage ist falsch (z.B. $2 = 1$)
$\Rightarrow$ Gerade liegt **parallel** zur Ebene

Lagebeziehung Punkt und Gerade

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$$

$III.) -5 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 5$

$I.) 9 = 5 \cdot (1+k) \Rightarrow k = 0,8$

$II.) 1 = 5 \cdot (1-0,8) \Rightarrow$ wahre Aussage

$\Rightarrow C$ liegt für den Wert von $k = 0,8$ auf g_k

Erläuterung: *Lagebeziehung*

Mögliche Lagen eines Punktes zu einer Gerade:
Punkt liegt auf der Gerade, Punkt liegt nicht auf der Gerade

Überprüfung: Punkt teil einer Geraden ist.

Möglichkeiten:

Parameter in allen Zeilen gleich $\Rightarrow$ Punkt liegt auf der Gerade

Parameter nicht in allen Zeilen gleich $\Rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Gerade

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Begründen Sie, dass die Größe des Schnittwinkels von g_k und der $x_1 x_2$-Ebene weniger als $30°$ beträgt, wenn $2k^2 > 1$ gilt.

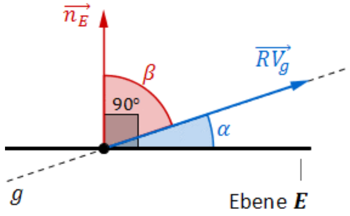
Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Schnitt Ebene und Gerade

$$\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{(1+k)^2 + (1-k)^2 + (-1)^2} \cdot 1} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{2k^2}_{>1} + 3}}_{>2}}$$

$\sin\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha < 30°$

Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*



Der **Sinus** des Winkels α zwischen einer Geraden g und einer Ebenen E ist gegeben durch:

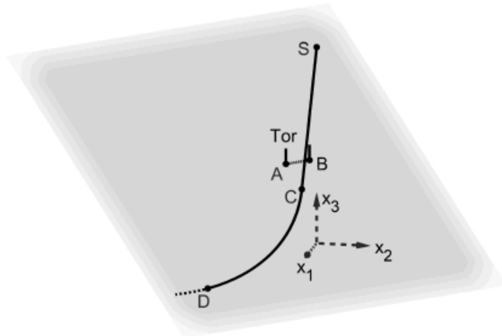
$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}\right|}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

wobei $\overrightarrow{RV_g}$ der Richtungsvektor der Geraden und $\overrightarrow{n_E}$ der Normalenvektor der Ebene ist.

(Anmerkung: Man verwendet die Formel gerne ohne Betragsstriche im Zähler; also $\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$.
Aber mit Betragsstrichen wird <u>immer</u> der spitze Winkel bestimmt.)

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Eine Skifahrerin fährt einen Hang hinab. Dieser wird modellhaft durch ein Flächenstück beschrieben, das in der Ebene E liegt. Die Startposition der Abfahrt entspricht dem Punkt S. Auf dem Hang befindet sich ein Tor, dessen Begrenzungsstangen im Modell an den Punkten A und B stehen. Von ihrer Startposition fährt die Skifahrerin zunächst entlang einer geraden Fahrlinie bis zu einer Stelle unterhalb des Tors, die dem Punkt C entspricht (vgl. Abbildung).



Die gerade Fahrlinie liegt dabei im Modell auf der Gerade $g_{0,8} : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die $x_1 x_2$-Ebene beschreibt die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 5 Metern in der Realität.

Geben Sie mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe a die Breite des Tors auf Meter genau an. Begründen Sie mithilfe der Aussage aus Aufgabe d, dass die gerade Fahrlinie der Skifahrerin um weniger als 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Geometrische Anwendung

Breite des Tors:

$5 \cdot \sqrt{2} = 7,07 \Rightarrow 7m$

Winkel der Fahrlinie gegenüber der Horizontalen:

$2 \cdot 0,8^2 = 1,28 > 1 \Rightarrow$ der Nenner ist wieder größer als zwei und somit ist der Winkel kleiner als 30°

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Begründen Sie rechnerisch, dass die Skifahrerin das Tor tatsächlich durchquert.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Schnitt zweier Geraden

Gerade der Strecke $[A\,B]$:

$$g_{A\,B}: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn R als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{R}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden $R\,T$.

$g_{0,8}$ und Gerade der Strecke $[A\,B]$ schneiden: $g_{0,8} \cap g_{A\,B}$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen werden gleichgesetzt. Es entsteht somit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{I.} & 1,8\lambda & = & 8-\mu \\ \text{II.} & 0,2\lambda & = & \mu \\ \text{III.} & 10-\lambda & = & 6 \end{array}$$

III. $10 - \lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 4$

I. $1,8 \cdot 4 = 8 - \mu \Rightarrow \mu = 0,8$

II. $0,2 \cdot 4 = 0,8 \Rightarrow$ wahre Aussage

$\Rightarrow g_{0,8}$ und die Gerade der Strecke $[A\,B]$ schneiden ich

$\Rightarrow$ Da $0 < 0,8 < 1$ schneidet die Gerade die Strecke $[A\,B]$

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

An der Stelle, die im Modell dem Punkt C entspricht, wird die Fahrlinie der Skifahrerin ohne Knick durch eine kreisbogenförmige Kurve fortgesetzt.
Während der Fahrt entlang dieser Kurve erreicht die Skifahrerin eine Stelle, die dem Punkt $D(18|-2|2)$ entspricht.
Der Kreisbogen, der diese Kurve beschreibt, ist Teil eines Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$.
Die Koordinaten von M können mit folgendem Gleichungssystem ermittelt werden.

$$\text{I} \quad m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$$

$$\text{II} \quad \begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{III} \quad \sqrt{(m_1-9)^2 + (m_2-1)^2 + (m_3-5)^2} = \sqrt{(m_1-18)^2 + (m_2+2)^2 + (m_3-2)^2}$$

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die den Gleichungen I, II und III zugrunde liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Begründung

I.: M liegt in E.

II.: $[M\,C]$ schneidet $g_{0,8}$ senkrecht.

III.: Die Länge der Strecke $[M\,D]$ entspricht der Strecke $[M\,C]$ und damit dem Radius r