Abitur 2023 Mathematik Stochastik IV

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

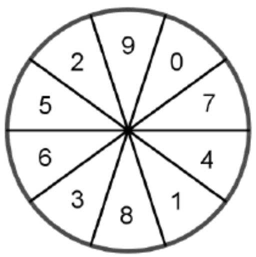
Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.



Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

A: „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt.“

B: „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt.“

Teilaufgabe Teil B 2 (5 BE)

Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.

C: „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4.“
D: „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3.“

Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“ , so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Ein erster Spieler entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Auszahlung erhält.

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Bei einem zweiten Spieler beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Er möchte nun das Spiel entweder sofort beenden oder das Glücksrad genau ein weiteres Mal drehen. Berechnen Sie für den Fall, dass sich der Spieler für die weitere Drehung entscheiden sollte, den Erwartungswert für die Auszahlung. Geben Sie eine Empfehlung ab, ob sich der Spieler für das Beenden des Spiels oder für die weitere Drehung entscheiden sollte, und begründen Sie Ihre Empfehlung.

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, n-mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5n \cdot 0{,}9^n$ berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.

Im Folgenden wird ein Glücksrad mit n gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis $n-1$ durchnummeriert sind, betrachtet.

Teilaufgabe Teil B 4a (3 BE)

Bestimmen Sie für $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dreimaligem Drehen des Glücksrads genau zwei gleiche Zahlen erzielt werden.

Teilaufgabe Teil B 4b (4 BE)

Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Zahlen verschieden sind, kleiner als 1% ist.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeit

E : „mindestens 2 schwarze Kugel im Behälter“

$p(\text{„gelbe Kugel“}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(\text{„schwarze Kugel“}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Erläuterung:

Mindestens 2 schwarze Kugel = entweder 2 ODER 3 - die Wahrscheinlichkeiten werden addiert.

Fall: 3 schwarze Kugeln

Pro Wurf ist die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu wählen gleich $\frac{2}{3}$, d.h. $\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}_{\text{3 schw. Kugeln}}$

Fall: 2 schwarze Kugeln

Bedeutet, dass bei einem Wurf eine gelbe und bei den anderen 2 eine schwarze Kugel gewählt wird.
Die gelbe Kugel kann mit dem 1., 2. oder 3. Wurf gewählt werden, d.h. 3 Möglichkeiten.

$$3\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{schw.}}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{schw.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{gelb}}$$

$$P(E)=\underbrace{3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{2 schw. Kugeln}}+\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}_{\text{3 schw. Kugeln}}=\frac{12}{27}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

E_2: „Im Behälter liegen 2 schwarze Kugel“
E_3: „Im Behälter liegen 3 schwarze Kugel“

$P\,(E_2)=\frac{12}{27}$ (s. Teilaufgabe Teil A a)

$P\,(E_3)=\frac{8}{27}$ (s. Teilaufgabe Teil A a)

Erläuterung:

Entweder sind im Behälter 2 ODER 3 schwarze Kugeln.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Behälter 2 schwarze Kugeln liegen ist $\frac{12}{27}$ (s. Teilaufgabe Teil A a).
Beim ersten Ziehen gibt es 2 schwarze Kugeln von 3 Kugeln insgesamt. Beim zweiten Ziehen, dann nur 1 schwarze Kugel von 2 Kugeln insgesamt.

$$\Rightarrow\quad P(\text{2 schwarze Kugeln gezogen})=\frac{12}{27}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\ldots$$

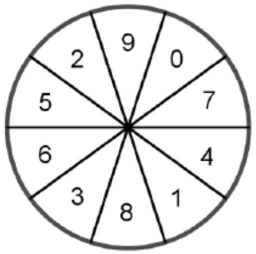
Die Wahrscheinlichkeit, dass im Behälter 3 schwarze Kugeln liegen ist $\frac{8}{27}$ (s. Teilaufgabe Teil A a). Die Wahrscheinlichkeit 2 von 3 schwarze Kugel zu ziehen ist 1.

$$\Rightarrow\quad P(\text{2 schwarze Kugeln gezogen})=\frac{12}{27}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{8}{27}=\frac{12}{27}$$

$$P(\text{2 schwarze Kugeln gezogen})=\frac{12}{27}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{8}{27}=\frac{12}{27}$$

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.



Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

A: „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt.“

B: „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1

Binomialverteilung

$$p(\text{„ungerade Zahl“}) = \frac{5}{10} = 0,5$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P(A) = P_{0,5}^{20}(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot 0,5^7 \cdot 0,5^{13} \approx 0,07393 \approx 7,4\%$$

Erläuterung:

Es wird mehr als siebenmal ($X \geq 8$) und höchstens zwölfmal ($X \leq 12$) eine ungerade Zahl erzielt.

$$P(B) = P_{0,5}^{20}(8 \leq X \leq 12)$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“

$$P(B) = P_{0,5}^{20}(X \leq 12) - P_{0,5}^{20}(X \leq 7) \overset{\text{TW}}{=} 0,86841 - 0,13159 = 0,73682 \approx 73,7\%$$

Teilaufgabe Teil B 2 (5 BE)

Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.

C: „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4.“
D: „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2

Stochastische Unabhängigkeit

$$C = \{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(2,0),(0,3),(3,0),(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$D = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$

$$p(\text{Ereignis aus C}) = p(\text{Ereignis aus D}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$P(C) = 10 \cdot 0,01 = 0,1$$

$$P(D) = 4 \cdot 0,01 = 0,04$$

$C \cap D$: $\{(1,2),(2,1)\}$

$P(C \cap D) = 2 \cdot 0,01 = 0,02$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$P(C) \cdot P(D) = 0,1 \cdot 0,04 \neq 0,02 = P(C \cap D)$

$\Rightarrow \quad C$ und D sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“ , so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.

Ein erster Spieler entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Auszahlung erhält.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Binomialverteilung

$p(\text{„Zahl 0“}) = 0,1$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(X = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$P_{0,1}^4(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,1^0 \cdot (1 - 0,1)^4 = 0,9^4 = 65,61\%$

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Bei einem zweiten Spieler beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Er möchte nun das Spiel entweder sofort beenden oder das Glücksrad genau ein weiteres Mal drehen. Berechnen Sie für den Fall, dass sich der Spieler für die weitere Drehung entscheiden sollte, den Erwartungswert für die Auszahlung. Geben Sie eine Empfehlung ab, ob sich der Spieler für das Beenden des Spiels oder für die weitere Drehung entscheiden sollte, und begründen Sie Ihre Empfehlung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$p = \frac{1}{10}$

k	0	61	62	63	64	65	66	67	68	69
$P(X=k)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \dots + x_n\, p_n$$

$$E(X) = \frac{1}{10} \cdot (61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69) = 58,5$$

Wegen 58,5 < 60 sollte der Spieler das Spiel sofort beenden.

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, n-mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5n \cdot 0,9^n$ berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Anwendungszusammenhang

$$5n \cdot 0,9^n = 5(n+1) \cdot 0,9^{n+1} \qquad | : 5$$

$$n \cdot 0,9^n = (n+1) \cdot 0,9^{n+1} \qquad | : 0,9^n$$

$$n = (n+1) \cdot 0,9 \qquad | : (n+1)$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \quad n = 9$$

9 und 10 sind die einzigen aufeinanderfolgenden Werte. Die Aussage ist also richtig.

Teilaufgabe Teil B 4a (3 BE)

Im Folgenden wird ein Glücksrad mit n gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis $n-1$ durchnummeriert sind, betrachtet.

Bestimmen Sie für $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dreimaligem Drehen des Glücksrads genau zwei gleiche Zahlen erzielt werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4a

Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{„genau zwei gleiche Zahlen“}) = \binom{3}{2} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0,48 = 48\%$$

Erläuterung:

1. Drehen: jede Zahl darf vorkommen $\quad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{5}$

2. Drehen: die Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe Zahl vom 1. Drehen wieder erzielt wird, ist gleich $\frac{1}{5}$

3. Drehen: alle restlichen Zahlen dürfen erzielt werden $\quad \Rightarrow \quad p = \frac{4}{5}$

Es gibt $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ Möglichkeiten aus 3 Drehungen 2 auszuwählen, bei denen die gleiche Zahl erzielt wird.

Teilaufgabe Teil B 4b (4 BE)

Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Zahlen verschieden sind, kleiner als 1% ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4b

Wahrscheinlichkeit

E: „alle Zahlen verschieden"

Erläuterung:

Beim ersten Drehen können alle Zahlen erzielt werden. Es gibt also n Möglichkeiten und die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{n}{n}$.

Beim zweiten Drehen können alle Zahlen erzielt werden außer die vom 1. Drehen. Es gibt also $n-1$ Möglichkeiten und die Wahrscheinlichkeit ist $\dfrac{n-1}{n}$.

Beim dritten Drehen können alle Zahlen erzielt werden außer die vom 1. und 2. Drehen. Es gibt also $n-2$ Möglichkeiten und die Wahrscheinlichkeit ist $\dfrac{n-2}{n}$.

.
.
.

Beim letzten Drehen gibt es nur noch 1 Zahl, die man erzielen darf. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{1}{n}$.

$$P(E) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n}$$

Probieren durch Einsetzen:

$n = 6$: $\quad \dfrac{6!}{6^6} = 0,01543 > 0,01$

$n = 7$: $\quad \dfrac{7!}{7^7} = 0,00612 < 0,01$

$\Rightarrow$ Der kleinstmögliche Wert ist $n = 7$