Abitur 2023 Mathematik Stochastik III

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird.

Im Dezember 2021 wurden in Norwegen rund 14 000 Pkw neu zugelassen.
In einer vereinfachten Übersicht sind die Anteile der verschiedenen Antriebsarten an diesen Neuzulassungen dargestellt:

Pkw mit Elektromotor		Pkw ohne Elektromotor (Verbrenner)		
rein elektrisch	Plug-in-Hybrid	Benzin	Diesel	Sonstige
65 %	25 %	3 %	4 %	3 %

Für eine Untersuchung werden aus diesen Neuzulassungen 200 Fahrzeuge zufällig ausgewählt und deren Besitzer nach den Gründen für die Wahl der Antriebsart befragt. Da aus einer großen Anzahl von Fahrzeugen nur verhältnismäßig wenige ausgewählt werden, wird das Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet.

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

D: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich sieben oder acht Verbrenner mit Dieselmotor.“

E: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich mehr als 135 mit rein elektrischem Antrieb.“

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0,1^k \cdot (1-0,1)^{200-k}$ berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pkw mit Elektromotor unter den ausgewählten Fahrzeugen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Für einen bestimmten Wert $n \in \{1; 2; 3; \dots\}$ werden für $p \in]0; 1[$ die binomialverteilten Zufallsgrößen Z_p mit den Parametern n und p betrachtet. Weisen Sie nach, dass unter diesen Zufallsgrößen diejenige mit $p = 0,5$ die größte Varianz hat.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Aus den neu zugelassenen Pkw mit Elektromotor werden 40 Fahrzeuge zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau zehn Plug-in-Hybride befinden.

Teilaufgabe Teil B 2 (5 BE)

In Deutschland waren zu Beginn des Jahres 2021 etwa 320 000 Pkw mit rein elektrischem Antrieb und 280 000 Plug-in-Hybride zugelassen, also insgesamt etwa 600 000 Pkw mit Elektromotor. Der Anteil der Pkw mit Elektromotor am Gesamtbestand aller in Deutschland zugelassenen Pkw betrug rund 1,2 %. Bestimmen Sie die Anzahl der Pkw, die aus diesem Gesamtbestand mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97 % mindestens ein Pkw mit rein elektrischem Antrieb darunter ist.

Ein Autozulieferer hat zwei Betriebsstandorte A und B. Die Zahl der Beschäftigten am Standort A ist viermal so groß wie am Standort B. 60% aller Beschäftigten des Autozulieferers haben sich für den Kauf eines Jobtickets entschieden, mit dem die Firma die Nutzung des öffentlichen Personennahverkehrs für den Weg zur Arbeit fördert.

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten gleich ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers am Standort B arbeitet und kein Jobticket besitzt.

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Tatsächlich ist der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten unterschiedlich; am Standort B besitzt nur die Hälfte der Beschäftigten ein Jobticket. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers, der ein Jobticket besitzt, am Standort A arbeitet.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Ereignis beschreiben

„Es wird keinmal die Zahl 1 erzielt“

Bei jedem der 5 Würfe beträgt die Wahrscheinlichkeit, nicht eine 1 zu erzielen, $p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Wahrscheinlichkeit

E : „ jede Zahl mindestens einmal“

Erläuterung:

Wenn alle Zahlen mindestens einmal erzielt werden, dann wird eine Zahl zwei Mal gewürfelt.

1. Wurf:
Jede Zahl darf erzielt werden $\Rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$

2. Wurf:
Die gleiche Zahl aus dem 1. Wurf wird erzielt $\Rightarrow p = \frac{1}{4}$

3. Wurf:
Alle Zahlen, außer die aus dem 1. bzw. 2. Wurf, werden erzielt $\Rightarrow p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

4. Wurf:
Alle Zahlen, außer die aus dem 2. Wurf und 3. Wurf, werden erzielt $\Rightarrow p = \frac{2}{4}$

5. Wurf:
Die letzte noch nicht gewürfelte Zahl wird erzielt $\Rightarrow p = \frac{1}{4}$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie eine Zahl 2-Mal erzielt wird, z.B. beim 1. und 2. Wurf oder auch beim 2. und 5. Wurf.
Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, aus den 5 Würfen 2 auszuwählen, bei denen die gleiche Zahl gewürfelt wird.

$$P(E) = \binom{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Im Dezember 2021 wurden in Norwegen rund 14 000 Pkw neu zugelassen.
In einer vereinfachten Übersicht sind die Anteile der verschiedenen Antriebsarten an diesen Neuzulassungen dargestellt:

Pkw mit Elektromotor		Pkw ohne Elektromotor (Verbrenner)		
rein elektrisch	Plug-in-Hybrid	Benzin	Diesel	Sonstige
65 %	25 %	3 %	4 %	3 %

Für eine Untersuchung werden aus diesen Neuzulassungen 200 Fahrzeuge zufällig ausgewählt und deren Besitzer nach den Gründen für die Wahl der Antriebsart befragt. Da aus einer großen Anzahl von Fahrzeugen nur verhältnismäßig wenige ausgewählt werden, wird das Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

D: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich sieben oder acht Verbrenner mit Dieselmotor.“

E: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich mehr als 135 mit rein elektrischem Antrieb.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Binomialverteilung

$n = 200$

$p_E = P(\text{„Verbrenner mit Dieselmotor“}) = 0{,}04$

$p_D = P(\text{„rein elektrisch“}) = 0{,}65$

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 200$ (Anzahl Pkw) mit der Trefferwahrscheinlichkeit p_E angesehen werden.

$$P(D) = P_{0{,}04}^{200}(X = 7) + P_{0{,}04}^{200}(X = 8) \overset{\text{TW}}{=} 0{,}14172 + 0{,}14246 = 0{,}28418$$

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 200$ (Anzahl Pkw) mit der Trefferwahrscheinlichkeit p_D angesehen werden.

$$P(E) = P_{0{,}65}^{200}(X > 135)$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(\text{„mehr als k Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchsten k Treffer“})$

In mathematischen Zeichen:

$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$

$P(E) = 1 - P_{0,65}^{200}(X \leq 135) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,79183 = 0,20817$

Teilaufgabe Teil B 1b (3 BE)

Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0,1^k \cdot (1-0,1)^{200-k}$ berechnet werden kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Ereignis beschreiben

Höchstens 25 Fahrzeuge besitzen keinen Elektromotor.

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

$$\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0,1^k \cdot (1-0,1)^{200-k} = P_{0,1}^{200}(X \leq 25)$$

An dem Term erkennt man:

- $n = 200$

- $k = 25$

- $p = 0,1 = 1 - (0,65 + 0,25)$ ist die Trefferwahrscheinlichkeit für ein Fahrzeug ohne Elektromotor.

- $X \leq 25 \quad \Longleftrightarrow \quad$ höchstens 25 Treffer

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pkw mit Elektromotor unter den ausgewählten Fahrzeugen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$n = 200;\ p = 0,65 + 0,25 = 0,9$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Erwartungswert von X: $\quad \mu = n \cdot p$

$\mu = 200 \cdot 0,9 = 180$

Standardabweichung einer Zufallsgröße

$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = 4,24$

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Standardabweichung (Streuung) von X: $\quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Für einen bestimmten Wert $n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$ werden für $p \in]0;1[$ die binomialverteilten Zufallsgrößen Z_p mit den Parametern n und p betrachtet. Weisen Sie nach, dass unter diesen Zufallsgrößen diejenige mit $p = 0,5$ die größte Varianz hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Varianz einer Zufallsgröße

$\text{Var}\ (Z_p) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Erläuterung: *Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt für die Varianz von X:

$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$n =$ Länge der Bernoulli-Kette
$p =$ Trefferwahrscheinlichkeit

Der Graph der Funktion $p \mapsto n \cdot p \cdot (1-p)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen 0 und 1. Der Scheitelpunkt (Hochpunkt) liegt zwischen den 2 Nullstellen, also bei $p = 0,5$.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Aus den neu zugelassenen Pkw mit Elektromotor werden 40 Fahrzeuge zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau zehn Plug-in-Hybride befinden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Bedingte Wahrscheinlichkeit

E : „Pkw mit Elektromotor“
H : „Plug-in-Hybrid“
R : „rein elektrisch“

Aus der Tabelle der Angaben: $P(E \cap H) = 0,25$; $P(E \cap R) = 0,65$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$P_E(H) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{0,25}{0,25 + 0,65} = \frac{5}{18} \qquad \text{(Trefferwahrscheinlichkeit)}$$

Wahrscheinlichkeit

$n = 40;\ p = \frac{5}{18}$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P_{\frac{5}{18}}^{40}(X = 10) = \binom{40}{10} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{5}{18}\right)^{30} \approx 13,3\%$$

Teilaufgabe Teil B 2 (5 BE)

In Deutschland waren zu Beginn des Jahres 2021 etwa 320 000 Pkw mit rein elektrischem Antrieb und 280 000 Plug-in-Hybride zugelassen, also insgesamt etwa 600 000 Pkw mit Elektromotor. Der Anteil der Pkw mit Elektromotor am Gesamtbestand aller in Deutschland zugelassenen Pkw betrug rund 1,2 %. Bestimmen Sie die Anzahl der Pkw, die aus diesem Gesamtbestand mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97 % mindestens ein Pkw mit rein elektrischem Antrieb darunter ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2

Binomialverteilung

Anteil der Pkw mit rein elektrischem Antrieb:

$$\frac{320.000}{320.000 + 280.000} \cdot 1,2\% = 0,64\%$$

Text analysieren und Daten herauslesen:

„Bestimmen Sie die Anzahl der Pkw...“ $\Rightarrow$ n ist gesucht

“ ... mit einer Wahrscheinlichkeit von **mehr als** 97%...“ $\Rightarrow$ $P > 0,97$

“ ... **mindestens** ein Pkw mit rein elektrischem Antrieb “ $\Rightarrow$ $X \geq 1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n (Pkw aus dem Gesamtbestand) mit der Trefferwahrscheinlichkeit $0,64\%$ angesehen werden.

$P^n_{0,0064}(X \geq 1) > 0,97$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P^n_{0,0064}(X = 0) > 0,97 \qquad | -1$

$-P^n_{0,0064}(X = 0) > -0,03 \qquad | \cdot(-1)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$P^n_{0,0064}(X = 0) < 0,03$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P^n_p(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P^n_p(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$(1 - 0,0064)^n < 0,03$

$0,9936^n < 0,03$

Erläuterung: *Rechenweg*

$0,9936^n < 0,03 \qquad | \quad \ln()$

$\ln\,(0,9936^n) < \ln(0,03)$

$n \cdot \ln(0,9936) < \ln(0,03) \qquad | \quad : \ln(0,9936)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln(0,03)}{\ln(0,9936)}$

$n > \dfrac{\ln(0,03)}{\ln(0,9936)} \approx 546,14$

$\Rightarrow \quad n \geq 547$ (Pkw)

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Ein Autozulieferer hat zwei Betriebsstandorte A und B. Die Zahl der Beschäftigten am Standort A ist viermal so groß wie am Standort B. 60% aller Beschäftigten des Autozulieferers haben sich für den Kauf eines Jobtickets entschieden, mit dem die Firma die Nutzung des öffentlichen Personennahverkehrs für den Weg zur Arbeit fördert.

Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten gleich ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers am Standort B arbeitet und kein Jobticket besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Wahrscheinlichkeit

A: „arbeitet am Standort A“
B: „arbeitet am Standort B“
J: „hat ein Jobticket“

Erläuterung:

Wenn $P(B) = x$ ist und nach Angabe $P(A) = 4x$, dann ergibt sich aus (es gibt nur diese zwei Standorte)

$P(A) + P(B) = 1,$

dass $x + 4x = 1$, also $x = \frac{1}{5}$.

$P(B) = \frac{1}{5} = 0,2$

$P(J) = 60\% = 0,6$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Aus der Annahme, dass der Anteil der Beschäftigten mit Jobticket an beiden Standorten gleich ist, folgt:

$P_A(J) = P_B(J) = P(J) = 0,6$

$P_B(\overline{J}) = 1 - P_B(J) = 0,4$

$P\left(B \cap \overline{J}\right) = P(B) \cdot P_B(\overline{J}) = 0,2 \cdot (1 - 0,6) = 8\%$

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Tatsächlich ist der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten unterschiedlich; am Standort B besitzt nur die Hälfte der Beschäftigten ein Jobticket. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers, der ein Jobticket besitzt, am Standort A arbeitet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

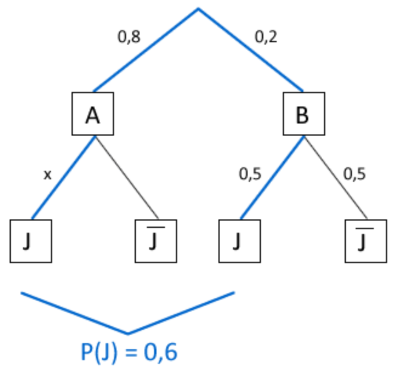
Baumdiagramm erstellen

A: „arbeitet am Standort A“
B: „arbeitet am Standort B“
J: „hat ein Jobticket“

$P(B) = 0,2$

$P(J) = 60\% = 0,6$

$P_B(J) = P_B\left(\overline{J}\right) = 0,5$



Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P\ (J) = P\ (A \cap J) + P\ (B \cap J)$

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$P\ (A \cap J) = P(A) \cdot P_A\ (J) = 0,8 \cdot x$

$0,6 = 0,8x + 0,2 \cdot 0,5$

$0,8x = 0,5$

$x = \dfrac{5}{8}$

Wahrscheinlichkeit

$$P_J(A) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)} = \frac{0,8 \cdot \frac{5}{8}}{0,6} = \frac{5}{6}$$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$