Abitur 2023 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x} + 1$.

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1|g(1))$.

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion g^{-1} von g ist in $[1; +\infty[$ definiert. Bestimmen Sie einen Term von g^{-1}.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -x^2 + 2a\,x$ mit $a \in]1; +\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\dfrac{4}{3}a^3$ hat.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

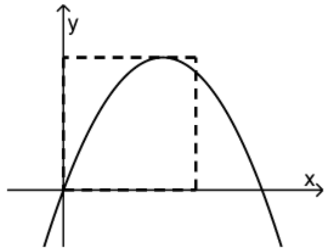


Abb. 1

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

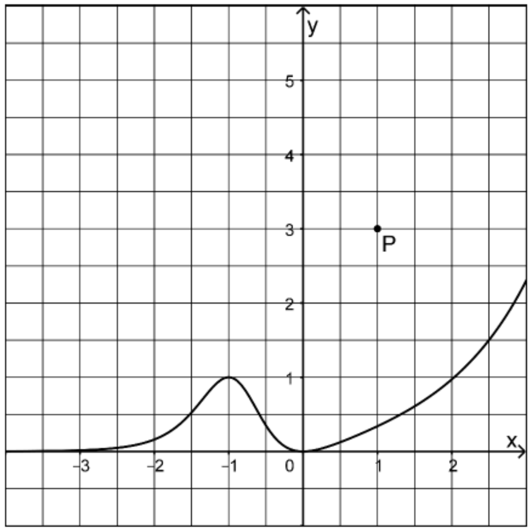


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.
An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x \cdot (8-5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$ beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde an.
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f für $0 \leq x \leq 4$.
Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = \left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)$.

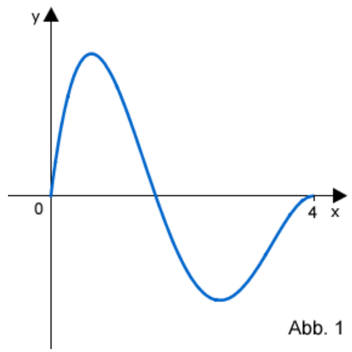


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

Teilaufgabe Teil B 1b (1 BE)

Es gilt $f(2) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe.

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von Bedeutung.

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

Teilaufgabe Teil B 1f (3 BE)

Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die mittlere Änderungsrate der Staulänge.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde.

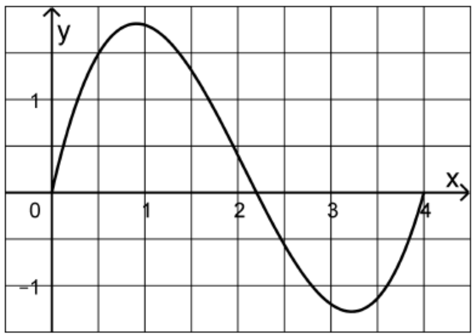


Abb. 2

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \{1; 2; 3 \ldots\}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

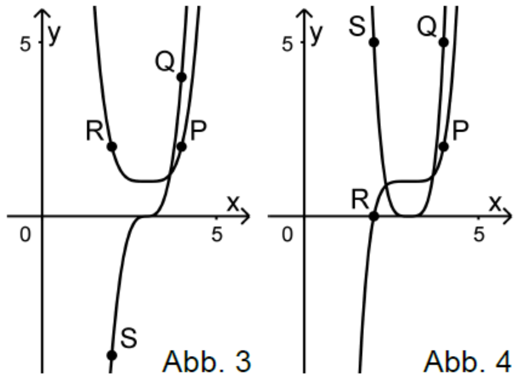
Teilaufgabe Teil B 2c (6 BE)

Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist.

Teilaufgabe Teil B 2d (7 BE)

Die Graphen von h_k und h'_k werden in der Abbildung 3 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 4 für $k = 5$ beispielhaft für ungerade Werte von k. Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P\ (4|h_k(4))$, $Q\ \left(4|h'_k(4)\right)$, $R\ (2|h_k(2))$ und $S\ \left(2|h'_k(2)\right)$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.



Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k+1$ überein.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $e^x - 2$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2 \qquad | \ln$$

$$x = \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$$f(0) = \frac{e^0}{e^0 - 2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$S_y(0|-1)$$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = e^x$ und $v(x) = e^x - 2$.
Dann ist $u'(x) = e^x$ und $v'(x) = e^x$.

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion e^x ist gleich die Funktion selbst.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 2) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{e^x \cdot (e^x - 2 - e^x)}{(e^x - 2)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 2)^2}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x} + 1$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1|g(1))$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Tangentengleichung ermitteln

$$g(x) = \sqrt{x} + 1 = x^{\frac{1}{2}} + 1$$

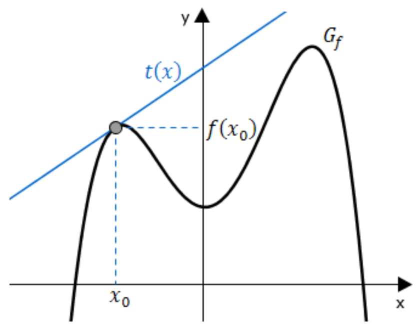
$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2}$$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$



Hier ist $x_0 = 1$.

$$t : y = (x - 1) \cdot g'(1) + g(1)$$

$$t : y = (x - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2$$

$$t : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion g^{-1} von g ist in $[1; +\infty[$ definiert. Bestimmen Sie einen Term von g^{-1}.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Umkehrfunktion bestimmen

$$y = \sqrt{x} + 1$$

Erläuterung: *Vertauschen der Variablen*

Um die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f zu bestimmen, vertauscht man die Variablen x und y in der Funktionsgleichung und löst die Gleichung nach y auf.

Einfaches Beispiel:

$f(x) = x + 2$

$y = x + 2$

Vertauschen:

$x = y + 2$

Auflösen:

$y = x - 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$

$x = \sqrt{y} + 1$

$\sqrt{y} = x - 1 \qquad |\,^2$

$y = (x-1)^2$

$\Rightarrow \quad g^{-1}(x) = (x-1)^2$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -x^2 + 2a\,x$ mit $a \in]1; +\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Flächenberechnung

$f(x) = -x^2 + 2a\,x$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen seinen Nullstellen einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_0^{2a} f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int_0^{2a} \left(-x^2 + 2a\,x\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $-x^2 + 2a\,x$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-x^2 + 2a\,x\right)\ \mathrm{dx} = -\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2a\frac{x^{1+1}}{1+1} = -\frac{1}{3}x^3 + a\,x^2$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + a\,x^2\right]_0^{2a}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = -\frac{1}{3}(2a)^3 + a(2a)^2 - (0+0) = -\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

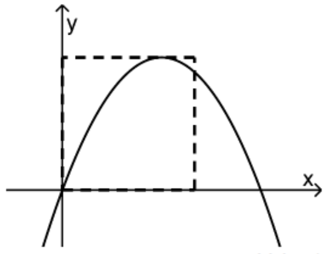


Abb. 1

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = -x^2 + 2a\,x \quad , \quad a \in]1; +\infty[$

$A(a) = \frac{4}{3}a^3 \qquad$ (s. Teilaufgabe Teil A 3a)

Scheitelpunkt S bestimmen:

$f'(x) = -2x + 2a$

$-2x + 2a = 0$

$x = a$

$f(a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad S\ (a|a^2) \quad$ Scheitelpunkt

Erläuterung:

Der Graph von f berührt die Seite des Quadrats im Punkt $\left(a|a^2\right)$. Die Länge der Seiten des Quadrats entsprechen somit a^2.

Der Flächeninhalt des Quadrats ist $a^2 \cdot a^2$.

$\frac{4}{3}a^3 = a^2 \cdot a^2$

$\frac{4}{3}a^3 = a^4$

$a^4 - \frac{4}{3}a^3 = 0$

$a^3 \cdot \left(a - \frac{4}{3}\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$(a = 0) \qquad a = \frac{4}{3}$

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

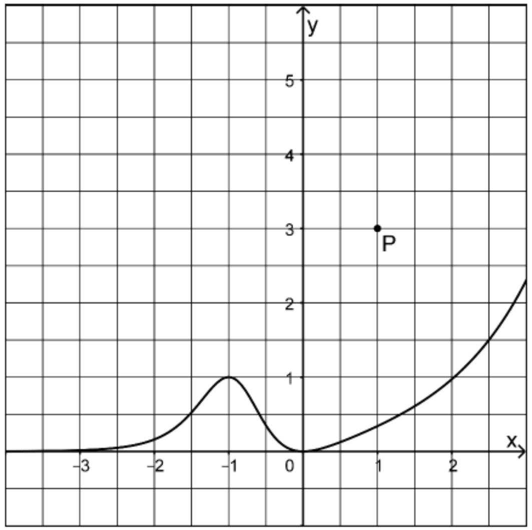


Abb. 2

Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Verschiebung von Funktionsgraphen

TIP$(2|-1)$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Der Graph von h geht aus dem Graphen von g hervor durch:

1) Verschiebung entlang der positiven x-Achse um 3 Längeneinheiten

$g(x) \rightarrow g(x-3)$

Der Hochpunkt verschiebt sich von $(-1|1)$ nach $(2|1)$

2) Spiegelung an der x-Achse

$g(x-3) \rightarrow -g(x-3)$

Der Hochpunkt $(2|1)$ wird zum Tiefpunkt $(2|-1)$.

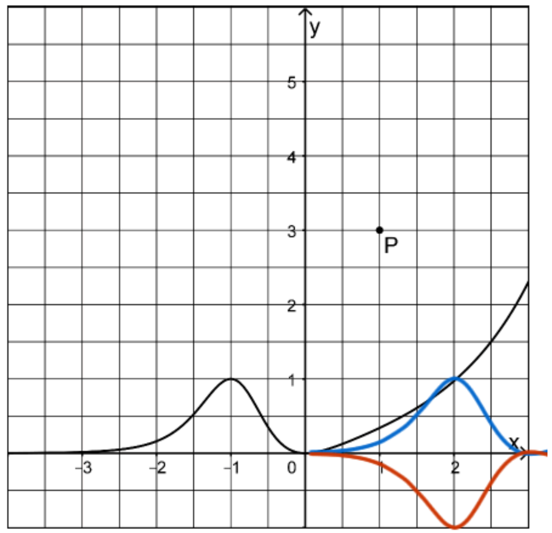


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Graph der Stammfunktion

Der Graph der Stammfunktion ist streng monoton steigend, hat an den Stellen $x = -1$ und $x = 0$ Wendepunkte. Er ist linksgekrümmt für $x \in]-\infty, -1[$ und $x \in]-2, +\infty[$ und rechtsgekrümmt für $x \in]-1, -2[$.

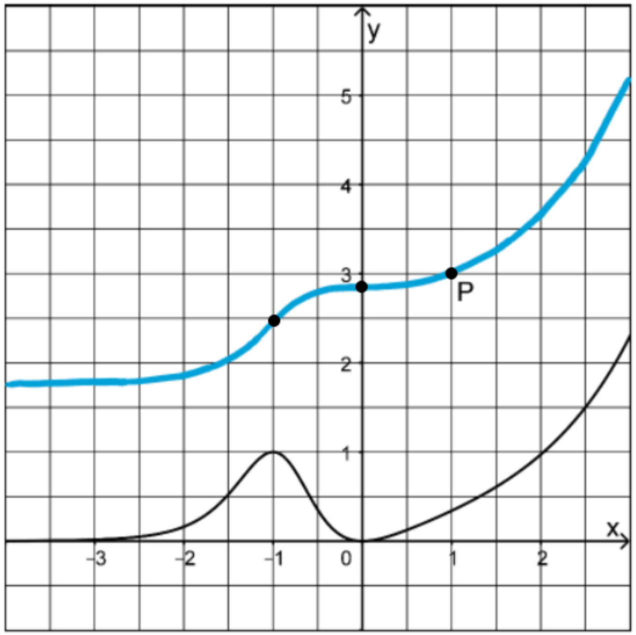


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.
An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$ beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde an.
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f für $0 \leq x \leq 4$.
Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = \left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)$.

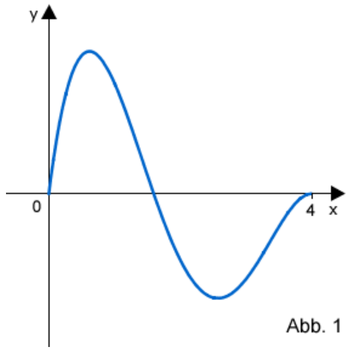


Abb. 1

Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 0$

$x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$x_1 = 0$

$8 - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{8}{5} = 1,6$

$\left(1 - \dfrac{x}{4}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{x}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 4$ (doppelte Nullstelle)

Zeitpunkte:

$t_1 = $ 6:00 Uhr

$\dfrac{8}{5} \cdot 60 = 96$ Minuten nach 6:00 Uhr, d.h. $t_2 = $ 7:36 Uhr

$t_3 = 4$ Stunden nach 6:00 Uhr, also 10:00 Uhr

Der Funktionsterm von f besteht aus dem Produkt von 3 Termen. Damit hat f genau 3 Nullstellen.

Teilaufgabe Teil B 1b (1 BE)

Es gilt $f(2) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Anwendungszusammenhang

Zum Zeitpunkt 08:00 Uhr nimmt die Staulänge ab.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Extremwertaufgabe

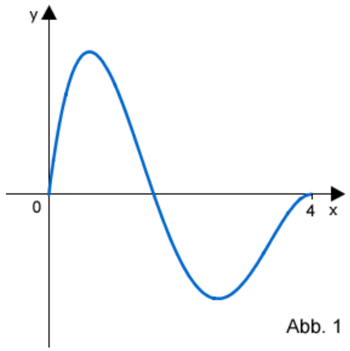


Abb. 1

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Der Zeitpunkt, zum dem die Staulänge am stärksten zunimmt, entspricht dem Zeitpunkt, zu dem f maximal wird.

Ansatz: $f'(x) = 0$

$$\left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

1. $5x^2 - 16x + 8 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{10} = \frac{16 \pm \sqrt{96}}{10}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{16 - \sqrt{96}}{10} \approx 0,62$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{16 + \sqrt{96}}{10} \approx 2,58$$

2. $1 - \frac{x}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 4$

Aus dem Graphen von f, folgt, dass f an der Stelle $x = 0,62$ ein Maximum besitzt.

$0,62 \cdot 60 \approx 37$ min

Um 6:37 Uhr nimmt die Staulänge am stärksten zu.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Eigenschaften der Ableitungsfunktion

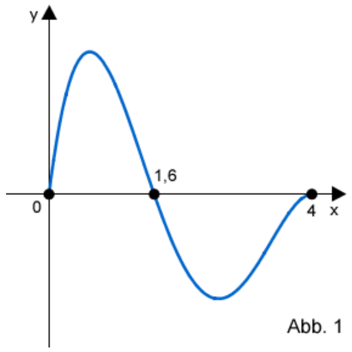


Abb. 1

Der Graph der momentanen Änderungsrate G_f liegt für $x \in]0; 1,6[$ oberhalb der x-Achse und für $x \in]1,6; 4[$ unterhalb der x-Achse.
Somit nimmt die Staulänge bis 1,6 Stunden nach 6:00 Uhr zu und ab $x = 1,6$ nimmt sie ab.
Der Stau ist 1,6 Stunden nach 6:00 Uhr, also um 7:36 Uhr, am längsten.

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von Bedeutung.

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Stammfunktion

$$s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$

$s'(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x = f(x)$

$\Rightarrow$ s ist eine Stammfunktion von f

Erläuterung:

Der Stau beginnt laut Angabe erst um 6:00 Uhr, also bei $x = 0$. Somit muss für die Funktion s gelten: $s(0) = 0$.

$s(0) = 0$

$\Rightarrow$ Aussage ist richtig

Funktionswert berechnen

$$s(4) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 \cdot (4-4)^3 = 1 \cdot 0 = 0$$

Erläuterung:

Wenn sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat, dann bedeutet es, dass die Staulänge $s(x)$ 4 Stunden nach 6:00 Uhr gleich 0 ist.

Also: $s(4) = 0$

Teilaufgabe Teil B 1f (3 BE)

Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die mittlere Änderungsrate der Staulänge.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Mittleren Änderungsrate bestimmen

06:30 Uhr $\iff$ $x = 0,5$ (halbe Stunde seit 6:00 Uhr)

08:00 Uhr $\iff$ $x = 2$ (2 Stunden seit 6:00 Uhr)

$$s(2) - s(0,5) = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \cdot (4-2)^3 - \left(\frac{0,5}{4}\right)^2 \cdot (4-0,5)^3 = 2 - \frac{249}{512} \approx 1,33$$

Die Zunahme beträgt $1,33$ km.

Mittlere Änderungsrate: $\frac{s(2) - s(0,5)}{2 - 0,5} \approx \frac{1,33}{1,5} \approx 0,89\frac{\text{km}}{h}$

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde.

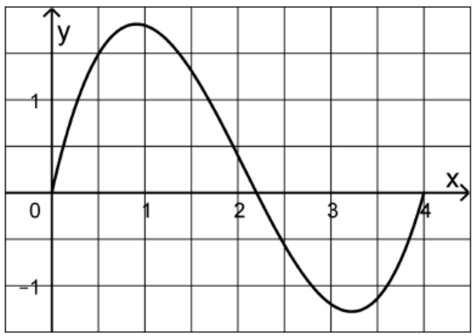
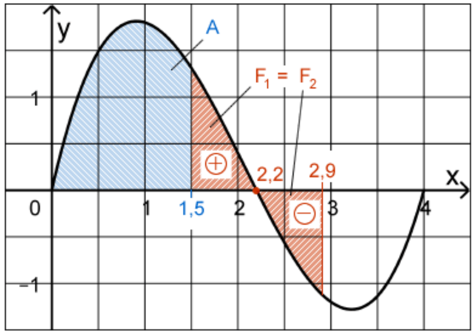


Abb. 2

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Stammfunktion



Zeitpunkt: $x \approx 2,9$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Die Funktion f gibt die momentane Änderungsrate der Staulänge. Die Staulänge selbst wird von einer Stammfunktion von f gegeben. Die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse zwischen 0 und einem Zeitpunkt t einschließt, entspricht dem Wert der Staulänge zum Zeitpunkt t.

Um 07:30 Uhr (d.h. 1,5 Stunden nach 06:00 Uhr) hat der Stau eine Länge, die dem Flächeninhalt A entspricht.

Erläuterung:

Der Graph von f nimmt bis ca. $x = 2,2$ nur positive Werte an, somit nimmt die Staulänge bis zu dem Zeitpunkt zu.

Bis ca. $x = 2,2$ nimmt die Staulänge weiterhin zu. Diese entspricht in der Abbildung dem Flächeninhalt F_1.

Erläuterung:

Der Graph von f nimmt ab ca. $x = 2,2$ nur negative Werte an, somit nimmt die Staulänge ab dem Zeitpunkt ab.

Ab ca. $x = 2,2$ nimmt die Staulänge ab, bis zu einem bestimmten Zeitpunkt, wo die Abnahme genauso groß ist (Flächeninhalt F_2), wie die Zunahme nach dem Zeitpunkt $x = 2,2$.

Bei $x \approx 2,9$ gilt: $F_1 = F_2$. Die Staulänge hat zu diesem Zeitpunkt denselben Wert wie A.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \{1; 2; 3\ldots\}$.

Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Grenzwert bestimmen

k gerade: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-3)^k + 1 = +\infty$

k ungerade: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-3)^k + 1 = -\infty$

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Funktionenschar

$h_k(x) = (x-3)^k + 1$

$h_k(3) = 1 \quad \Rightarrow \quad (3|1)$

$h_k(4) = 1^k + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad (4|2)$

> Erläuterung:
>
> Der Term $(x-3)^k$ ist unabhängig von k wenn $x-3$ entweder gleich 0 oder 1 ist. Ausgehend davon können die beiden Punkte angegeben werden.

Teilaufgabe Teil B 2c (6 BE)

Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Eigenschaften der Ableitungsfunktion

$h_k(x) = (x-3)^k + 1$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
>
> Hier ist $\quad v(x) = x - 3$.
> Dann ist $\quad v'(x) = 1$.

$h'_k(x) = k(x-3)^{k-1}$

Für $k = 1$ und $k = 2$ ist der Graph von h'_k eine Gerade.

Für $k = 1$ ist $h_1(x) = x - 2$ und $h'_1(x) = 1$. Beide Graphen sind Geraden und schneiden sich bei $x = 3$.

Für $k = 2$ ist $h_2(x) = (x-3)^2 + 1$ und $h'_2(x) = 2(x-3)$.

$(x-3)^2 + 1 = 2(x-3)$

$x^2 - 6x + 10 = 2x - 6$

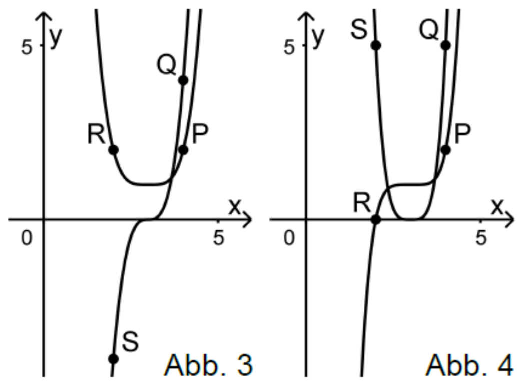
$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 4$

$x = 4$ ist doppelte Nullstelle. Die Graphen von h_2 und h'_2 berühren sich an der Stelle $x = 4$. Somit stimmt die Aussage.

Teilaufgabe Teil B 2d (7 BE)

Die Graphen von h_k und h'_k werden in der Abbildung 3 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 4 für $k = 5$ beispielhaft für ungerade Werte von k. Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P\ (4|h_k(4))$, $Q\ \left(4|h'_k(4)\right)$, $R\ (2|h_k(2))$ und $S\ \left(2|h'_k(2)\right)$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.



Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k+1$ überein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Eigenschaften eines Trapezes

$P\ (4|h_k(4))$, $Q\ \left(4|h'_k(4)\right)$, $R\ (2|h_k(2))$ und $S\ \left(2|h'_k(2)\right)$

Sowohl P und Q als auch R und S haben übereinstimmende x-Koordinaten. Somit sind [PQ] und [RS] parallel. Das Viereck PQRS ist ein Trapez.

Flächeninhalt eines Trapezes

$h_k(x) = (x-3)^k + 1$

$h'_k(x) = k \cdot (x-3)^{k-1}$ (s. Teilaufgabe Teil B 2c)

$h_k(2) = (-1)^k + 1$

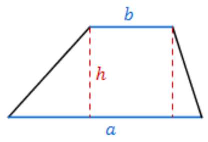
$h_k(4) = 2$

$h'_k(2) = k \cdot (-1)^{k-1}$

$h'_k(4) = k$

Für k gerade und $k \geq 4$ hat das Trapez für k die Eckpunkte $P(4|2)$, $Q(4|k)$, $R(2|2)$ und $S(2|-k)$ und somit ein Flächeninhalt

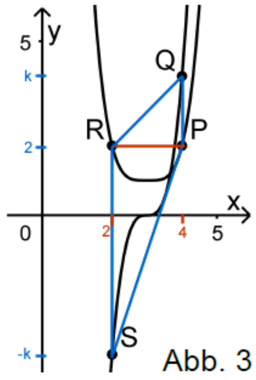
Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$

Aus Abb. 3 ist ersichtlich, dass die Grundseite [QP] eine Länge von $k-2$ und die Grundseite [RS] eine Länge von $2-(-k)$ hat. Die Höhe des Trapezes ist die Länge der Seite [RP], also $4-2=2$.

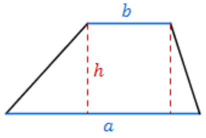


$\frac{1}{2} \cdot ((k-2) + (2-(-k))) \cdot 2 = 2k$

Für k gerade und $k \geq 4$ hat das Trapez für $k+1$ die Eckpunkte $P(4|2)$, $Q(4|k+1)$, $R(2|0)$

und $S(2|k+1)$ und somit ein Flächeninhalt

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$

Aus Abb. 4 ist ersichtlich, dass die Grundseite [QP] eine Länge von $k+1-2$ und die Grundseite [SR] eine Länge von $k+1$ hat. Die Höhe des Trapezes ist die Länge der Seite [SQ], also $4-2=2$.

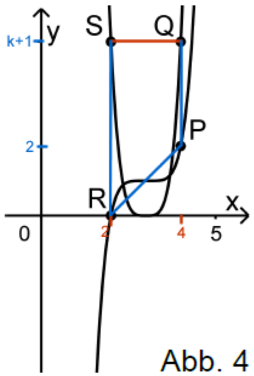


Abb. 4

$\frac{1}{2} \cdot ((k+1-2)+(k+1)) \cdot 2 = 2k$