Abitur 2023 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3.

Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

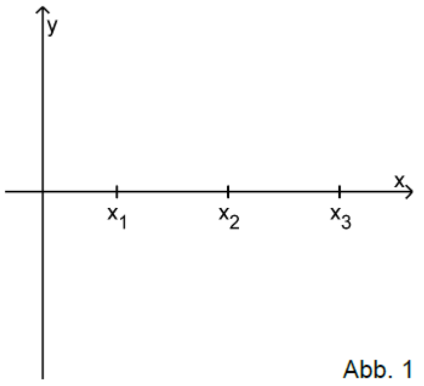


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

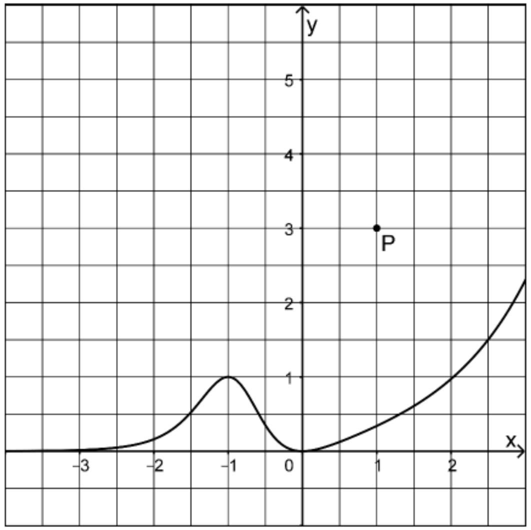


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f von f, der die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

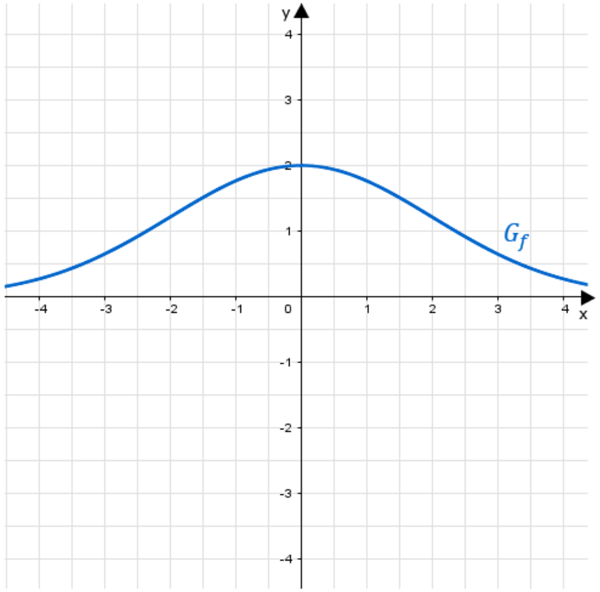


Abb. 3

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Der Punkt $W\left(-2|2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ist einer der beiden Wendepunkte von G_f. Die Tangente an G_f im Punkt W wird mit w bezeichnet. Ermitteln Sie eine Gleichung von w und berechnen Sie die Stelle, an der w die x-Achse schneidet.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$)

Betrachtet wird für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ das Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c|0)$, $Q(c|0)$, $R\ (c|f(c))$ und S.

Teilaufgabe Teil B 1c (1 BE)

Zeichnen Sie für $c = 2$ das Rechteck PQRS in Abbildung 3 ein.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Berechnen Sie denjenigen Wert von c, für den $\overline{\text{QR}} = 1$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von c die Seitenlängen des Rechtecks PQRS an und begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks durch den Term $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$ gegeben ist.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Es gibt einen Wert von c, für den der Flächeninhalt $A(c)$ des Rechtecks PQRS maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von c.

Betrachtet werden für $k \in \mathbb{R}$ die in $]-\infty; 0]$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto f(x) + k$. Somit gilt $f_0(x) = f(x)$, wobei sich f_0 und f im Definitionsbereich unterscheiden.

Teilaufgabe Teil B 1g (4 BE)

Begründen Sie mithilfe der ersten Ableitung von f_k, dass f_k für jeden Wert von k umkehrbar ist. Skizzieren Sie in Abbildung 3 den Graphen der Umkehrfunktion von f_0.

Teilaufgabe Teil B 1h (2 BE)

Geben Sie alle Werte von k an, für die der Graph von f_k und der Graph der Umkehrfunktion von f_k keinen gemeinsamen Punkt haben.

Abb. 4

Abbildung 4 zeigt ein Haus mit einer Dachgaube, deren Vorderseite schematisch in Abbildung 5 dargestellt ist. Die Vorderseite wird modellhaft durch das Flächenstück beschrieben, das der Graph G_f der Funktion f aus Teil B Teilaufgabe 1, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = 4$ einschließen. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

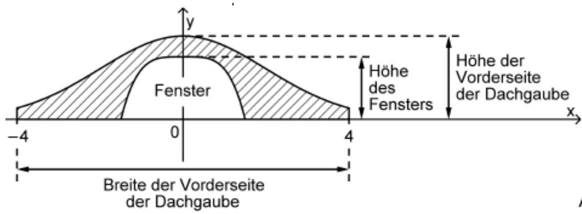


Abb. 5

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Geben Sie die Breite und die Höhe der Vorderseite der Dachgaube an.

In der Vorderseite der Dachgaube befindet sich ein Fenster. Dem Fenster entspricht im Modell das Flächenstück, das der Graph der Funktion g mit $g(x) = a\,x^4 + b$ und geeigneten Werten $a, b \in \mathbb{R}$ mit der x-Achse einschließt (vgl. Abbildung 5).

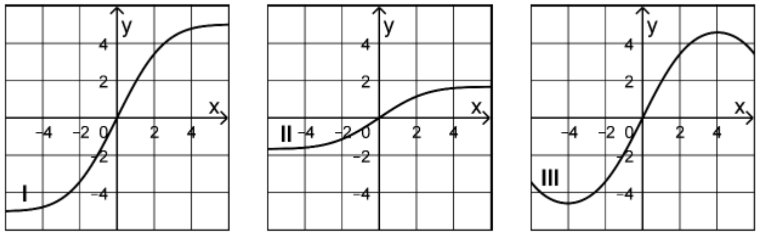
Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass a negativ und b positiv ist.

Um den Flächeninhalt der Vorderseite der Dachgaube zu ermitteln, wird eine Stammfunktion F von f betrachtet.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Einer der Graphen I, II und III ist der Graph von F. Begründen Sie, dass dies Graph I ist, indem Sie jeweils einen Grund dafür angeben, dass Graph II und Graph III nicht infrage kommen.



Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Bestimmen Sie nun mithilfe des Graphen von F aus Teil B Teilaufgabe 2c den Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters).
Beschreiben Sie unter Einbeziehung dieses Flächeninhalts die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs, mit dem der Wert von a rechnerisch so bestimmt werden könnte, dass bei einer Fensterhöhe von 1,50 m der Teil der Vorderseite der Dachgaube, der in Abbildung 5 schraffiert dargestellt ist, den Flächeninhalt 6 m^2 hat.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Um einen Näherungswert für die Länge der oberen Profillinie der Vorderseite der Dachgaube berechnen zu können, wird G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ durch vier Kreisbögen angenähert, die nahtlos ineinander übergehen und zueinander kongruent sind. Einer dieser Kreisbögen erstreckt sich im Bereich $0 \leq x \leq 2$ und ist Teil des Kreises mit Mittelpunkt $M(0|-1)$ und Radius 3. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des zu diesem Kreisbogen gehörenden Kreissektors und ermitteln Sie damit den gesuchten Näherungswert.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \ln(x-3)$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$\ln(x-3)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(h(x))$.

Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert. Somit gilt für die Argumentfunktion: $h(x) > 0$.

Somit gilt für die Argumentfunktion: $h(x) > 0 \iff x - 3 > 0$

$x - 3 > 0$

$x > 3$

Somit ist $D =]3; +\infty[$.

Nullstellen einer Funktion

Ansatz: $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$\ln(x-3) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*

Die Nullstellen der ln-Funktion liegt bei 1.
Für die Logarithmusfunktion $\ln(x-3)$ liegt die Nullstelle da, wo die Argumentfunktion den Wert 1 annimmt. Diese Überlegung führt zu der Geleichung $x - 3 = 1$.

$x - 3 = 1$

Somit liegt die Nullstelle von f bei $x = 4$.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f(x) = \ln(x-3)$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Kettenregel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{h(x)} \cdot h'(x)$

Hier ist $h(x) = x - 3$.
Dann ist $h'(x) = 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x-3} \cdot 1 = \dfrac{1}{x-3}$

Koordinaten von Punkten ermitteln

$\dfrac{1}{x-3} = 2$

$2 \cdot (x-3) = 1$

$2x - 6 = 1$

$2x = 7$

$x = 3,5$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - 1$.

Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Asymptoten bestimmen

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0^+}-1\right)=-1^+$$

Erläuterung: *Asymptoten, Grenzwert*

Um die Asymptoten einer Funktion zu bestimmen, untersucht man das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und an den Definitionslücken. Dazu bildet man Grenzwerte.

Gilt für eine Funktion $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=y_0$, für einen Wert $y_0\in\mathbb{R}$, so hat die Funktion g eine waagerechte Asymptote $h: y=y_0$

Somit ist waagerechte Asymptote der Funktion g die Gerade gegeben durch: $y=-1$

Wertemenge einer Funktion

$W=]-1;+\infty[$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Bestimmtes Integral

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Potenzregel*

Regel: $\quad a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^{-2}-1\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $x^{-2}-1$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int x^r\ \mathrm{dx}=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C\qquad (r\neq -1)$$

$$\Rightarrow\quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^{-2}-1\right)\ \mathrm{dx}=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\frac{x^{0+1}}{0+1}=-x^{-1}-x$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}=\left[-x^{-1}-x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F'=f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{dx}=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}=-2^{-1}-2-\left(-\frac{1}{2}^{-1}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-2+2+\frac{1}{2}=0$$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.

- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.

- f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3.

Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

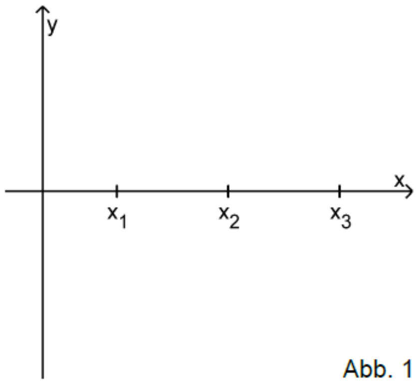


Abb. 1

Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Eigenschaften der Ableitungsfunktion

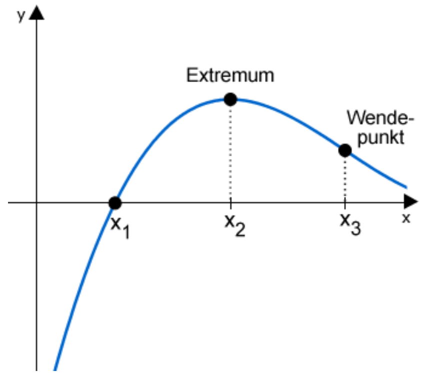
Da f' bei x_3 ein Extrempunkt hat, hat f dort einen Wendepunkt. Somit muss der Grad von f mindestens 3 sein.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Skizze



Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

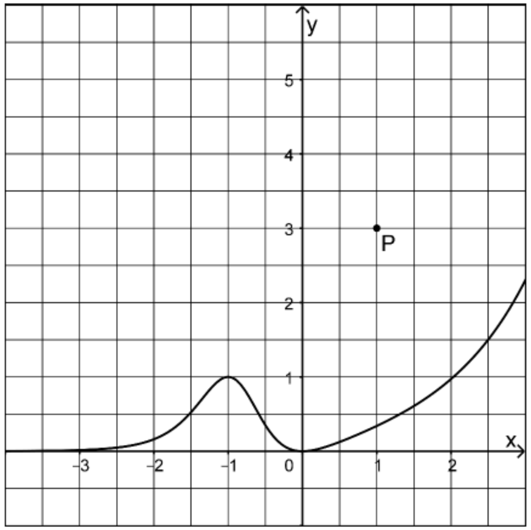


Abb. 2

Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Verschiebung von Funktionsgraphen

TIP$(2|-1)$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Der Graph von h geht aus dem Graphen von g hervor durch:

1) Verschiebung entlang der positiven x-Achse um 3 Längeneinheiten

$g(x) \to g(x-3)$

Der Hochpunkt verschiebt sich von $(-1|1)$ nach $(2|1)$

2) Spiegelung an der x-Achse

$g(x-3) \to -g(x-3)$

Der Hochpunkt $(2|1)$ wird zum Tiefpunkt $(2|-1)$.

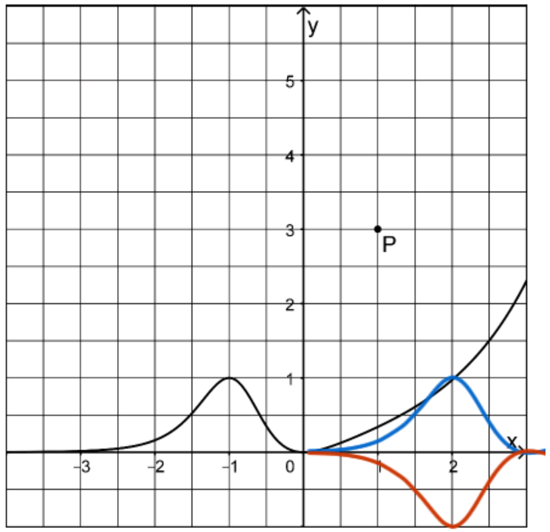


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Skizze

Der Graph der Stammfunktion ist streng monoton steigend, hat an den Stellen $x = -1$ und $x = 0$ Wendepunkte. Er ist linksgekrümmt für $x \in]-\infty, -1[$ und $x \in]-2, +\infty[$ und rechtsgekrümmt für $x \in]-1, -2[$.

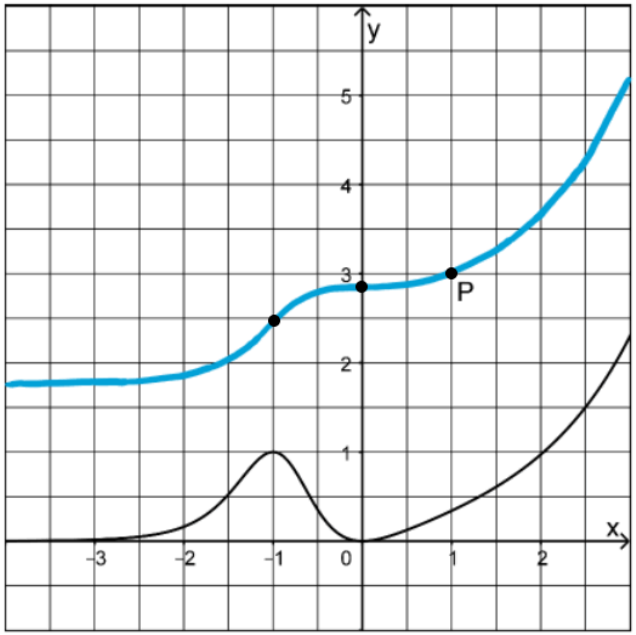


Abb. 2

Erläuterung: *Zusammenhang Stammfunktion / Funktion*

Zusammenhang zwischen F und f:

wo f ...	ist F ...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f von f, der die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

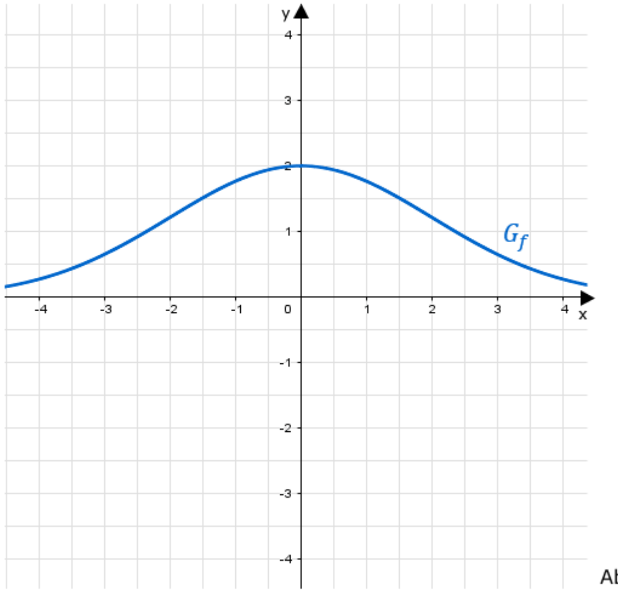


Abb. 3

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f(0) = 2e^{-\frac{1}{8}\cdot 0} = 2e^0 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|2)$

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f(-x) = 2e^{-\frac{1}{8}\cdot(-x)^2} = 2e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2} = f(x)$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

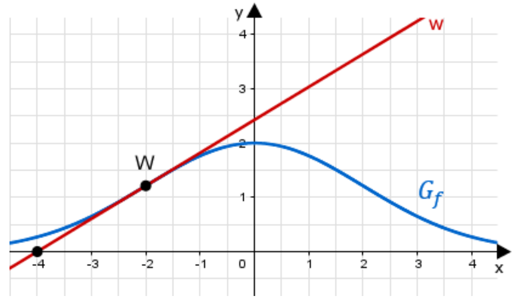
Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Der Punkt $W\left(-2|2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ist einer der beiden Wendepunkte von G_f. Die Tangente an G_f im Punkt W wird mit w bezeichnet. Ermitteln Sie eine Gleichung von w und berechnen Sie die Stelle, an der w die x-Achse schneidet.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Tangentengleichung ermitteln



$f(x) = 2e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^2$.

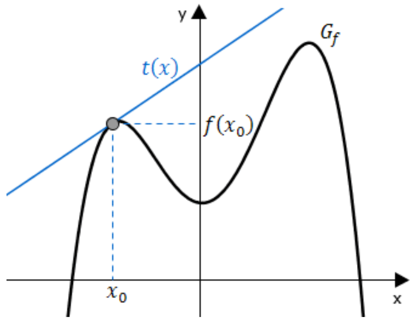
$f'(x) = 2e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x^2}$

$f'(-2) = e^{-\frac{1}{2}}$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = -2$.

$w : y = (x - (-2)) \cdot f'(-2) + f(-2)$

$w : y = (x + 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$

$w : y = e^{-\frac{1}{2}}\, x + 4e^{-\frac{1}{2}}$

Nullstellen einer Funktion

$e^{-\frac{1}{2}}\, x + 4e^{-\frac{1}{2}} = 0 \qquad | : e^{-\frac{1}{2}}$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

Teilaufgabe Teil B 1c (1 BE)

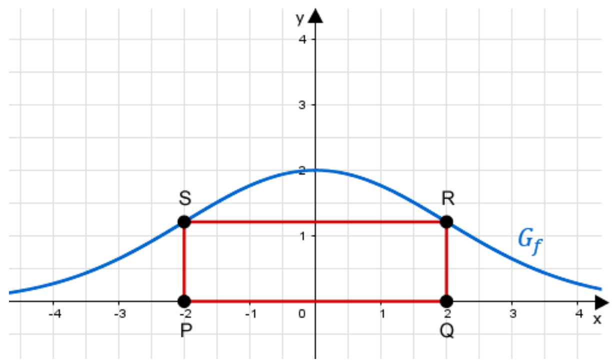
Betrachtet wird für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ das Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c|0)$, $Q(c|0)$, $R\ (c|f(c))$ und S.

Zeichnen Sie für $c = 2$ das Rechteck PQRS in Abbildung 3 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Skizze

$P(-2|0)$, $Q(2|0)$, $R(2|f(2))$



Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Berechnen Sie denjenigen Wert von c, für den $\overline{\mathrm{QR}} = 1$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Parameterwerte ermitteln

$f(x) = 2e^{-\frac{1}{8} \cdot x^2}$

$f(c) = 1$

$2e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} = 1$

$e^{-\frac{1}{8} \cdot c^2} = \dfrac{1}{2} \qquad |\ln$

$-\frac{1}{8}c^2 = \ln\frac{1}{2}$

$c^2 = -8\ln\frac{1}{2}$

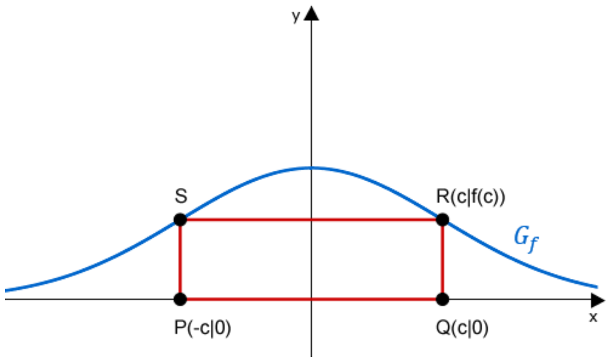
$c = \sqrt{-8\ln\frac{1}{2}} \approx 2{,}35$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von c die Seitenlängen des Rechtecks PQRS an und begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks durch den Term $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$ gegeben ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Flächeninhalt eines Rechtecks



$\overline{\text{PQ}} = \overline{\text{SR}} = 2c$

$\overline{\text{SP}} = \overline{\text{RQ}} = f(c) = 2e^{-\frac{1}{8}c^2}$

$A(c) = 2c \cdot 2e^{-\frac{1}{8}c^2} = 4c\,e^{-\frac{1}{8}c^2}$

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Es gibt einen Wert von c, für den der Flächeninhalt $A(c)$ des Rechtecks PQRS maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von c.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Extremwertaufgabe

$A(c) = 4c\,e^{-\frac{1}{8}c^2}$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(c) = 4c$ und $v(c) = e^{-\frac{1}{8}c^2}$.

Für die Ableitung von $e^{-\frac{1}{8}c^2}$ wird die Kettenregel für Exponentialfunktionen angewendet:

$g(x) = e^{h(x)} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = e^{h(x)} \cdot h'(x)$

In diesem Fall ist $h(c) = -\frac{1}{8}c^2$.

$A'(c) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} + 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}c\right)$

$A'(c) = 4e^{-\frac{1}{8}c^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}c^2\right)$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

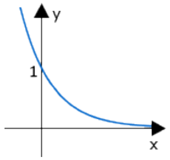
Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $A'(c) = 0$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Die Exponentialfunktion e^{-x} ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.



$$0 = \underbrace{4e^{-\frac{1}{8}c^2}}_{>0} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}c^2\right)$$

$$1 - \frac{1}{4}c^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}c^2 = 1$$

$$c^2 = 4$$

$$c_{1,2} = \pm 2$$

$\Rightarrow \quad c = 2$ (da $c \in \mathbb{R}^+$)

Teilaufgabe Teil B 1g (4 BE)

Betrachtet werden für $k \in \mathbb{R}$ die in $]-\infty; 0]$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto f(x) + k$. Somit gilt $f_0(x) = f(x)$, wobei sich f_0 und f im Definitionsbereich unterscheiden.

Begründen Sie mithilfe der ersten Ableitung von f_k, dass f_k für jeden Wert von k umkehrbar ist. Skizzieren Sie in Abbildung 3 den Graphen der Umkehrfunktion von f_0.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

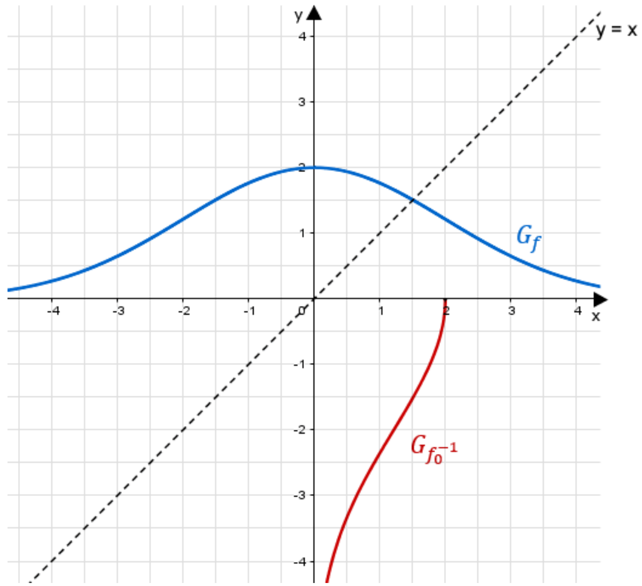
Umkehrfunktion bestimmen

$$f_k'(x) = f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{8}x^2}}_{>0} \geq 0$$

$\Rightarrow \quad f_k$ ist streng monoton zunehmend

$\Rightarrow \quad f_k$ ist für jeden Wert von k umkehrbar

Skizze



Teilaufgabe Teil B 1h (2 BE)

Geben Sie alle Werte von k an, für die der Graph von f_k und der Graph der Umkehrfunktion von f_k keinen gemeinsamen Punkt haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1h

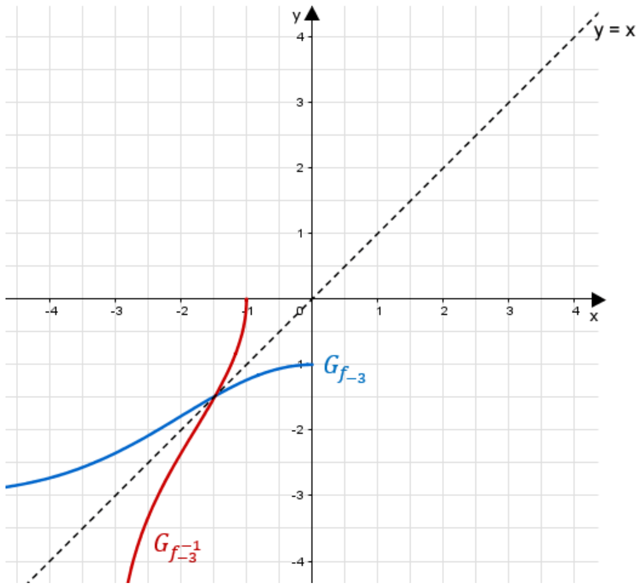
Umkehrfunktion bestimmen

$k \in]-2; +\infty[$

Erläuterung:

Für $k \leq -2$ schneidet der Graph der Funktion f_k die y-Achse im bzw. unterhalb des Ursprungs. Der an der Ursprungsgerde gespiegelte Graph von f_k (Graph der Umkehrfunktion) schneidet somit den Graphen der Funktion f_k.

Beispiel für den Fall $k = -3$:



Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Abb. 4

Abbildung 4 zeigt ein Haus mit einer Dachgaube, deren Vorderseite schematisch in Abbildung 5 dargestellt ist. Die Vorderseite wird modellhaft durch das Flächenstück beschrieben, das der Graph G_f der Funktion f aus Teil B Teilaufgabe 1, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = 4$ einschließen. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

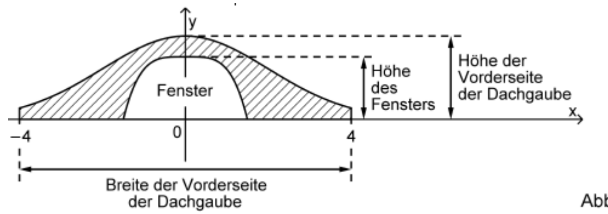


Abb. 5

Geben Sie die Breite und die Höhe der Vorderseite der Dachgaube an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Anwendungsaufgabe

Breite: 8 m

Erläuterung:

Der Graph der Funktion f schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 2$.

Höhe: 2 m

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

In der Vorderseite der Dachgaube befindet sich ein Fenster. Dem Fenster entspricht im Modell das Flächenstück, das der Graph der Funktion g mit $g(x) = a\,x^4 + b$ und geeigneten Werten $a, b \in \mathbb{R}$ mit der x-Achse einschließt (vgl. Abbildung 5).

Begründen Sie, dass a negativ und b positiv ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Eigenschaften einer Funktion

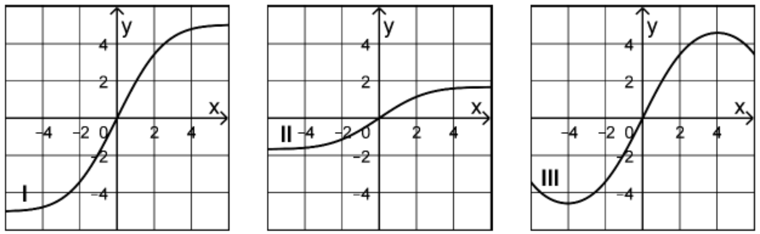
Nach unten geöffneter Graph $\quad\Rightarrow\quad a$ negativ

Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse $\quad\Rightarrow\quad b$ positiv

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Um den Flächeninhalt der Vorderseite der Dachgaube zu ermitteln, wird eine Stammfunktion F von f betrachtet.

Einer der Graphen I, II und III ist der Graph von F. Begründen Sie, dass dies Graph I ist, indem Sie jeweils einen Grund dafür angeben, dass Graph II und Graph III nicht infrage kommen.



Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Graph der Stammfunktion

Graph III ist nicht der Graph von F, da wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ der Graph von F

streng monoton steigend ist.

Graph II ist nicht der Graph von F, da seine Steigung an der Stelle $x = 0$ ungefähr gleich 1 ist. Für die Steigung der Stammfunktion F an der Stelle $x = 0$ gilt jedoch: $F'(0) = f(0) = 2$.

Erläuterung: *Zusammenhang Stammfunktion / Funktion*

Zusammenhang zwischen F und f:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

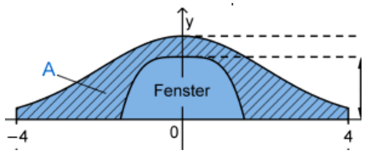
f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Bestimmen Sie nun mithilfe des Graphen von F aus Teil B Teilaufgabe 2c den Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters).
Beschreiben Sie unter Einbeziehung dieses Flächeninhalts die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs, mit dem der Wert von a rechnerisch so bestimmt werden könnte, dass bei einer Fensterhöhe von 1,50 m der Teil der Vorderseite der Dachgaube, der in Abbildung 5 schraffiert dargestellt ist, den Flächeninhalt 6 m^2 hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen -4 und 4 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_{-4}^{4} f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int_{-4}^{4} f(x)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

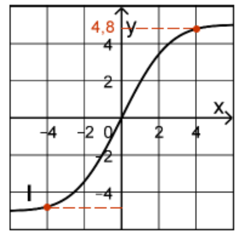
Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = [F(x)]_{-4}^{4} = F(4) - F(-4) \approx 4,8 - (-4,8) = 9,6\ \mathrm{m}^2$$

Erläuterung:

Am Graphen der Stammfunktion (Graph I) können die Werte für $x = -4$ und $x = 4$ abgelesen werden.



Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Lösungsweg:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht dem Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters) minus der Flächeninhalt des Fensters.

Der Flächeninhalt des Fensters entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse zwischen seinen Nullstellen einschließt und ist gegeben durch:

$$A_{\text{Fenster}} = \int_{x_1}^{x_2} g(x)\ \mathrm{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \left(a\,x^4 + 1,5\right)\ \mathrm{dx}$$

$$A_{\text{schraffiert}} = 9,6 - \int_{x_1}^{x_2} \left(a\,x^4 + 1,5\right)\ \mathrm{dx} = 6$$

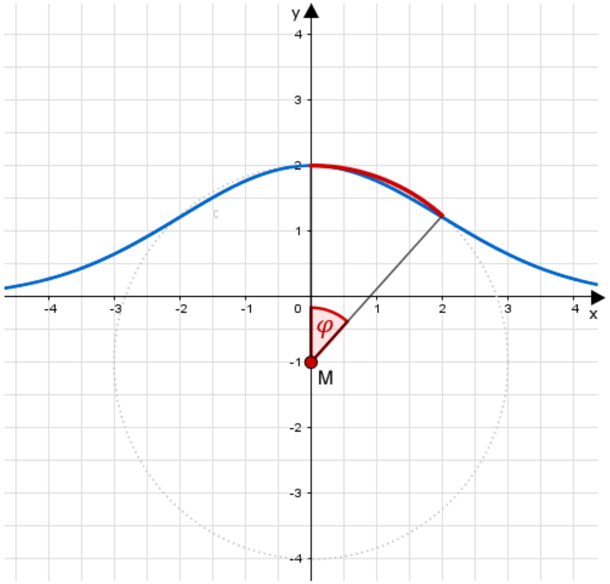
Dabei sind x_1 und x_2 die Nullstellen der Funktion $g(x) = a\,x^4 + 1,5$, $x_1 < x_2$ in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

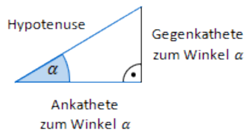
Um einen Näherungswert für die Länge der oberen Profillinie der Vorderseite der Dachgaube berechnen zu können, wird G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ durch vier Kreisbögen angenähert, die nahtlos ineinander übergehen und zueinander kongruent sind. Einer dieser Kreisbögen erstreckt sich im Bereich $0 \leq x \leq 2$ und ist Teil des Kreises mit Mittelpunkt $M(0|-1)$ und Radius 3. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des zu diesem Kreisbogen gehörenden Kreissektors und ermitteln Sie damit den gesuchten Näherungswert.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Mittelpunktswinkel bestimmen



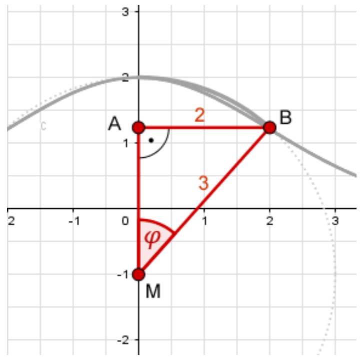
Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

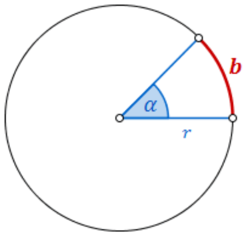
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.



Hier wird das rechtwinklige Dreieck MAB betrachtet.
Die Länge der Hypotenuse entspricht dem Radius des Kreises um den Mittelpunkt M.

$$\sin\varphi = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41{,}8^\circ$$

Erläuterung: *Bogenlänge*



Die Länge eines Bogens b ist gegeben durch die Formel $\quad b = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r\,\pi$

Dabei ist r der Radius des Kreises, auf dem der Bogen liegt und α der Winkel, der den Kreissektor aufspannt.

α heißt auch Mittelpunktswinkel.

Da hier die Länge der oberen Profillinie der Vorderseite durch 4 solche Kreisbögen angenähert werden kann, entspricht die Gesamtlänge $4 \cdot \dfrac{41,8^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3$.

Länge: $4 \cdot \dfrac{41,8^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3 \approx 8,75$ m