

Abitur 2023 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h , die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe Teil A a (1 BE)

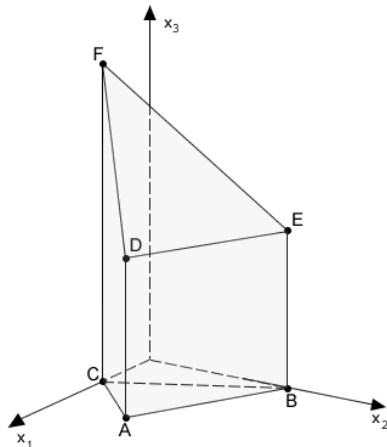
Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

Die Abbildung zeigt den Körper $ABCDEF$ mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

Die Punkte D , E und F liegen in der Ebene L .



Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$)

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Berechnen Sie das Volumen des Körpers $ABCDEF$.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Die Ebene N_k enthält die x_3 -Achse und den Punkt $P_k(1-k|k|0)$ mit $k \in]0; 1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k . Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a; b[$, für die jeweils gilt, dass N_k für alle Werte von $k \in]a; b[$ die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Auf der Kante $[AD]$ liegt der Punkt Q , auf der Kante $[BE]$ der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3 -Koordinate von Q .

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der $x_1 x_2$ -Ebene liegt und dabei eine positive x_2 -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff \lambda = 0,8, \text{ d.h. } S(4, 8|3, 6|0)$$

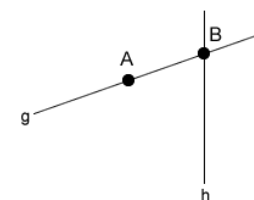
$$\vec{T} = \vec{S} + |\vec{CS}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

Lösung**Teilaufgabe Teil A a** (1 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(3|5|5)$ und $B(1|1|1)$ sowie die Geraden g und h , die sich in B schneiden. Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a**Lagebeziehung Punkt und Gerade**

$$A(3|5|5), B(1|1|1)$$

$$\vec{RV}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Richtungsvektor der Geraden } g$$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{RV}_g}$$

$$\Rightarrow A \in g$$

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b**Geradengleichung aufstellen**

$$A(3|5|5), B(1|1|1)$$

$$\vec{RV}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Richtungsvektor der Geraden } h$$

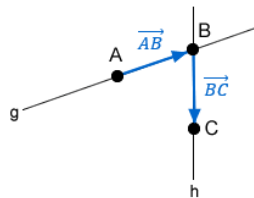
Erläuterung: Geradengleichung

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor \vec{P} und einen Richtungsvektor \vec{v} eindeutig bestimmt:

$$g: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn hier B als Aufpunkt genommen wird, dann ist \vec{B} der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden h .

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge einer Strecke

$$C \in h \Rightarrow C(1 + \lambda | 1 | 1)$$

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: Eigenschaften einer Raute

Eine Raute ist ein Viereck mit folgenden Eigenschaften:

- alle Seiten sind gleich lang
- gegenüberliegende Seiten sind einander parallel
- gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
- die Diagonalen halbieren sich gegenseitig

$$\text{Es muss gelten: } |\vec{AB}| = |\vec{BC}|$$

Erläuterung: Betrag eines Vektors

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

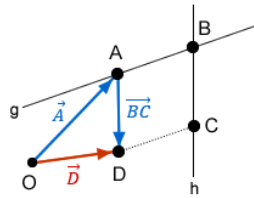
$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\lambda^2} = \pm \lambda$$

$$\Rightarrow \text{z.B. } \lambda = 6$$

$$\Rightarrow C(7|1|1)$$

Lage eines Punktes



$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC}$$

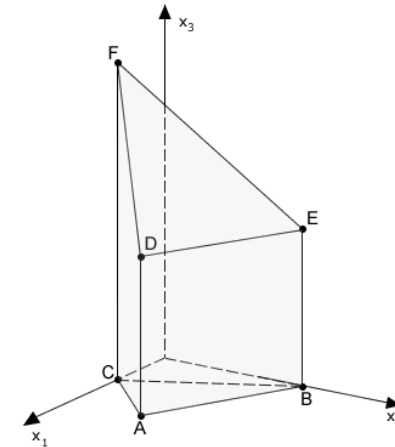
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$D(9|5|5)$

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

Die Punkte D , E und F liegen in der Ebene L .

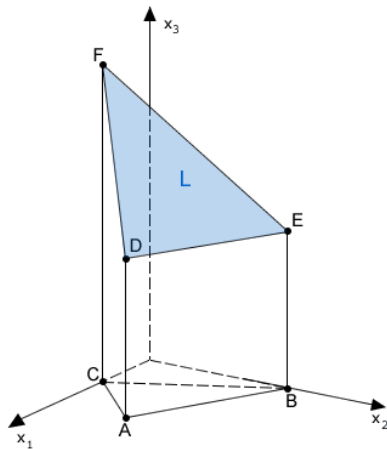


Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Ebene aus drei Punkte



$$D(6|3|6), E(0|6|6), F(3|0|12)$$

Richtungsvektoren der Ebene L bestimmen:

$$\vec{DE} = \vec{E} - \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DF} = \vec{F} - \vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

D sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene L .

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor \vec{n}_L der Ebene L bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Vektor \vec{n} , der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} \times \vec{DF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 0 \\ 0 + 36 \\ 18 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen. Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{9}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \vec{n}_L = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E: \vec{n}_E \circ \vec{X} = \vec{n}_E \circ \vec{P}$$

Hier (D ist Aufpunkt):

$$L: \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_L} \circ \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{D}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$

$$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 + 12 + 18$$

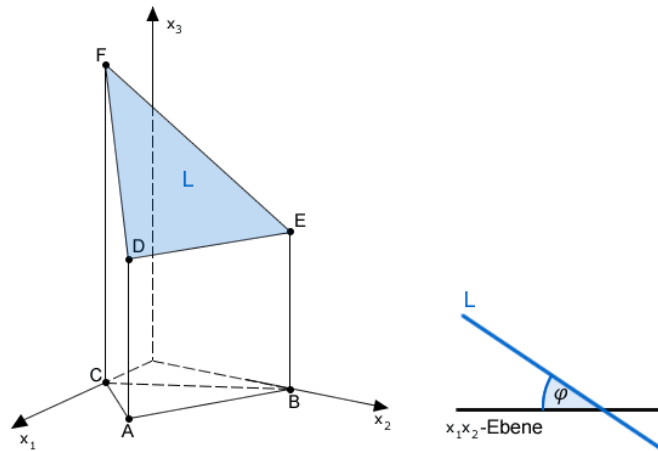
$$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der $x_1 x_2$ -Ebene einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Winkel zwischen zwei Ebenen

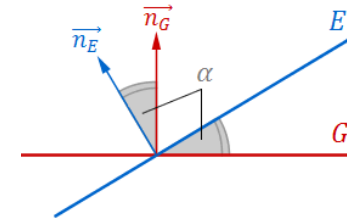


$$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$$

$$\text{Normalenvektor } \vec{n}_L \text{ der Ebene } L: \vec{n}_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor der } x_1 x_2\text{-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: Winkel zwischen zwei Vektoren



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren \vec{n}_E und \vec{n}_G .

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene L und der $x_1 x_2$ -Ebene bestimmen:

Erläuterung: Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$ -Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B.:

$$|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{0 + 0 + 3}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

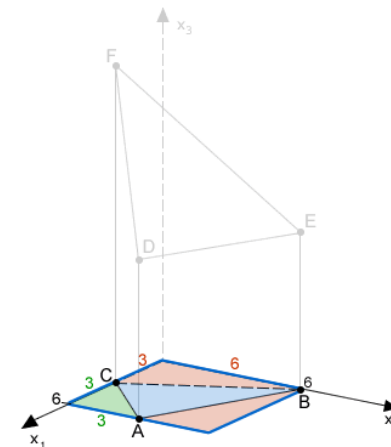
$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{29}} \right) \approx 56,15^\circ$$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Flächenberechnung



Erläuterung:

Fläche Rechteck: $6 \cdot 6$

Fläche Dreieck links: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$

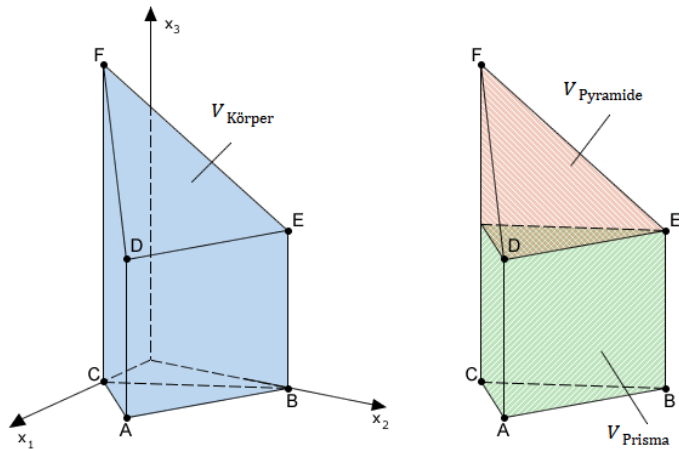
Fläche oberes und rechtes Dreieck: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Volumen eines geometrischen Körpers



Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

Das Volumen V eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h ist gegeben durch:

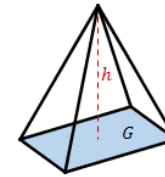
$$V = G \cdot h$$

In diesem Fall ist die Grundfläche das Dreieck ABC und die Höhe die x_3 -Koordinate des Punktes D.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist aus Teil B Teilaufgabe c bekannt.

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h = A_{\text{ABC}} \cdot 6 = \left(6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \cdot 6 = 81 \text{ VE}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

In diesem Fall ist die Grundfläche das Dreieck ABC und die Höhe die x_3 -Koordinate des Punktes F minus die x_3 -Koordinate des Punktes D.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} A_{\text{ABC}} \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27 \text{ VE}$$

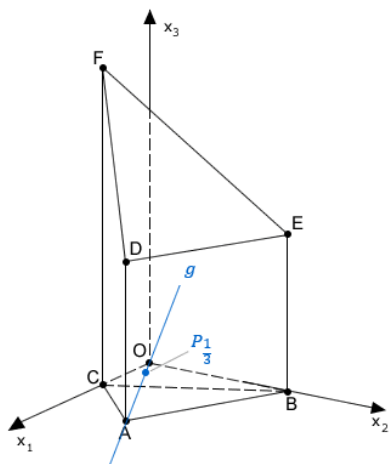
$$V_{\text{Körper}} = 81 + 27 = 108 \text{ VE}$$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Die Ebene N_k enthält die x_3 -Achse und den Punkt $P_k(1-k|k|0)$ mit $k \in]0; 1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k . Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a; b[$, für die jeweils gilt, dass N_k für alle Werte von $k \in]a; b[$ die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Geradengleichung aufstellen



Gerade g durch O und A bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor \vec{P} und einen Richtungsvektor \vec{v} eindeutig bestimmt:

$$g: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn hier O als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g .

$$g: \vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lage eines Punktes

$$P_k \in g \iff \begin{pmatrix} 1-k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1-k &= 6\lambda \\ k &= 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{k}{3} \\ 0 &= 0 \\ 1-k &= 6 \cdot \frac{k}{3} \\ 1 &= 3k \Rightarrow k = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$\text{Bereich: } \left] \frac{1}{3}; 1 \right[$$

Kanten: [AB], [DE], [CB], [EF]

Erläuterung:

Überlegungen:

1. Für $k = 0$ liegt P_0 auf der x_1 -Achse. Die Ebene N_0 ist somit die $x_1 x_3$ -Ebene (sie enthält ja die x_3 -Achse).
2. Für $k = 1$ liegt P_1 auf der x_2 -Achse. Die Ebene N_1 ist somit die $x_2 x_3$ -Ebene (sie enthält ja die x_3 -Achse).
3. Lässt man k von 0 bis 1 laufen, so dreht sich die $x_1 x_3$ -Ebene gegen den Uhrzeigersinn, bis sie die $x_2 x_3$ -Ebene erreicht. Dabei schneidet N_k verschiedene Kanten des Körpers.
4. Am Anfang der Rotation schneidet N_k die Kanten $[AC]$, $[BC]$, $[DF]$ und $[EF]$.
5. Für $k = \frac{1}{3}$ enthält N_k den Punkt A .
6. Für $k > \frac{1}{3}$ schneidet N_k die Kanten $[AB]$, $[DE]$, $[CB]$ und $[EF]$.
7. Für $0 < k < \frac{1}{3}$ schneidet N_k immer dieselben Kanten (s. Punkt 4). Für $\frac{1}{3} < k < 1$ schneidet N_k auch immer dieselben Kanten (s. Punkt 5)

Gefragt ist, welcher der Bereiche der größte ist (von der Länge). Das ist der

Bereich $\left] \frac{1}{3}; 1 \right[$.

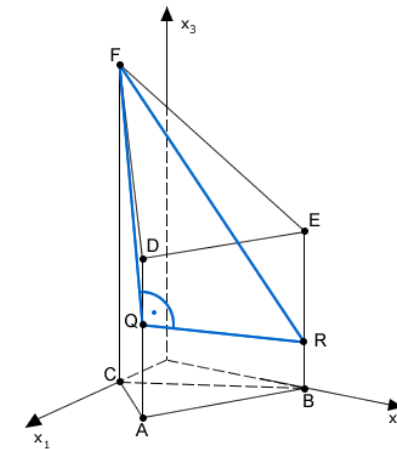
Für $k \in \left] \frac{1}{3}; 1 \right[$ schneidet N_k die Kanten $[AB]$, $[DE]$, $[CB]$ und $[EF]$.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Auf der Kante $[AD]$ liegt der Punkt Q , auf der Kante $[BE]$ der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3 -Koordinate von Q .

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Geradengleichung aufstellen



Gerade g_{AD} durch A und D aufstellen:

$$\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: Geradengleichung

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor \vec{P} und einen Richtungsvektor \vec{v} eindeutig bestimmt:

$$g: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist \vec{A} der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g_{AD} .

$$g_{AD}: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{AD}}$$

Lage eines Punktes

$$Q \in g_{AD} \Rightarrow Q(6|3|6\mu)$$

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{QF} = \vec{F} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 - 6\mu \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 - 6\mu \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{QF} \circ \overrightarrow{QR} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 - 6\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 - 6\mu \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$18 - 9 + (12 - 6\mu) \cdot (2 - 6\mu) = 0$$

$$9 + 24 - 72\mu - 12\mu + 36\mu^2 = 0$$

$$36\mu^2 - 84\mu + 33 = 0 \quad | : 3$$

$$12\mu^2 - 28\mu + 11 = 0$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 11}}{2 \cdot 12} = \frac{28 \pm \sqrt{256}}{24} = \frac{28 \pm 16}{24}$$

$$\left(\mu_1 = \frac{11}{6} \right) \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

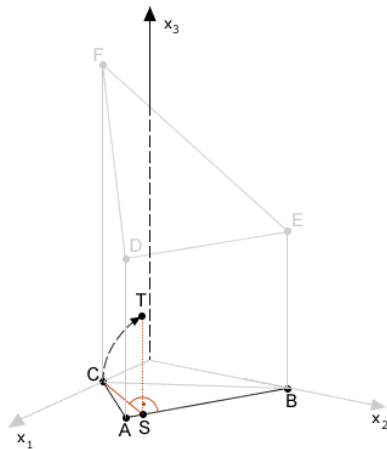
Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2 -Ebene liegt und dabei eine positive x_2 -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff \lambda = 0, 8, \text{ d.h. } S(4, 8|3, 6|0)$$

$$\vec{T} = \vec{S} + |\overrightarrow{CS}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g**Lage eines Punktes**



Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{AB}} \circ \underbrace{\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{\substack{\text{Punkt S auf Gerade AB} \\ \vec{CS}}} = 0$$

$$\vec{T} = \vec{S} + \underbrace{\underbrace{|\vec{CS}|}_{\text{Richtungsvektor } x_3\text{-Achse}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Länge } |\vec{CS}| \text{ der in } x_3\text{-Richtung zeigt}}$$

Der Punkt, der aus dem Punkt C nach der Drehung entsteht, wird mit T bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten von T .

S ist der Lotfußpunkt von C auf $[AB]$.