Abitur 2023 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

Gegeben sind die Punkte $A(19|0|0)$, $B(0|19|0)$, $E(12|0|7)$ und $F(0|12|7)$ (vgl. Abbildung 1). Das Viereck ABFE liegt in der Ebene L.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABFE ein Trapez mit zwei gleich langen Seiten ist.

Teilaufgabe Teil B b (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform sowie die Größe φ des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$; $\varphi \approx 55°$)

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEFGH, bei dem die quadratische Grundfläche ABCD parallel zur quadratischen Deckfläche EFGH liegt.
Der Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene. Außerdem werden die Punkte $S_k(0|0|k)$ mit $k \in]7; +\infty[$ betrachtet, die Spitzen von Pyramiden EFGHS$_k$ sind.

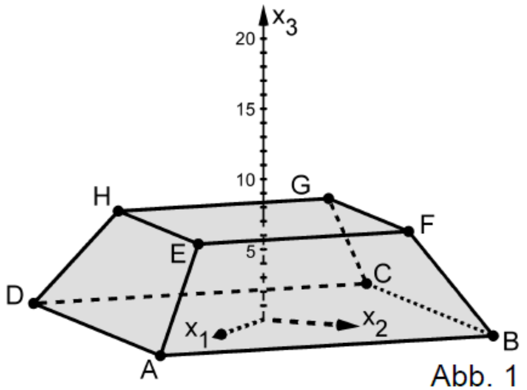


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von k, für den die Pyramide EFGHS$_k$ den Körper ABCDEFGH zu einer großen Pyramide ABCDS$_k$ ergänzt.

(zur Kontrolle: $k = 19$)

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Zeichnen Sie die Pyramide EFGHS$_{15}$ in Abbildung 1 ein. Die Seitenfläche EFS$_{15}$ und die Grundfläche EFGH dieser Pyramide schließen einen Winkel ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Größe dieses Winkels kleiner als 45° ist; verwenden Sie dazu folgende Information:

Für den Mittelpunkt M des Quadrats EFGH und den Punkt N mit $\overrightarrow{N} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{F}\right)$ *gilt* $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$.

Der Körper ABCDEFGHS$_{15}$ stellt modellhaft die Knickpyramide des Pharaos Snofru dar, die ca. 2650 v. Chr. in Ägypten erbaut wurde (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt die $x_1 x_2$-Ebene den horizontalen Boden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 7 m in der Realität.

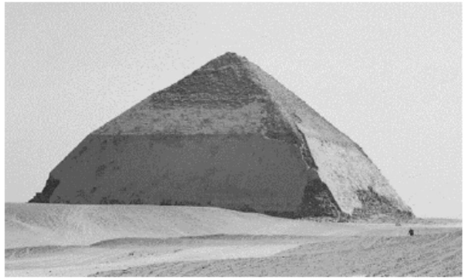


Abb. 2

Ursprünglich wurde mit dem Bau einer Pyramide begonnen, die im Modell der Pyramide ABCDS$_{19}$ entspricht. Aufgrund von Stabilitätsproblemen im Bauprozess musste die Neigung der Seitenflächen gegenüber dem Boden beim Erreichen einer bestimmten Höhe verändert werden. Der entstandene Knick ist namensgebend für die Pyramide.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Bestimmen Sie die Höhenänderung des Bauwerks, die durch die Bauplanänderung hervorgerufen wurde, in Metern. Begründen Sie, dass im unteren Teil des Bauwerks der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden um mehr als 9° größer ist als im oberen Teil des Bauwerks.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen auf die Knickpyramide Sonnenstrahlen, die im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_{15}E}$ dargestellt werden. Der Schatten der Spitze der Knickpyramide auf dem horizontalen Boden wird durch den Punkt T beschrieben. Die Lote durch die Punkte E, F, G, H und S_{15} auf die $x_1 x_2$-Ebene schneiden diese in den Punkten E', F', G', H' bzw. S'. Diese sind zusammen mit der Grundfläche der Pyramide und dem Punkt T in Abbildung 3 dargestellt.

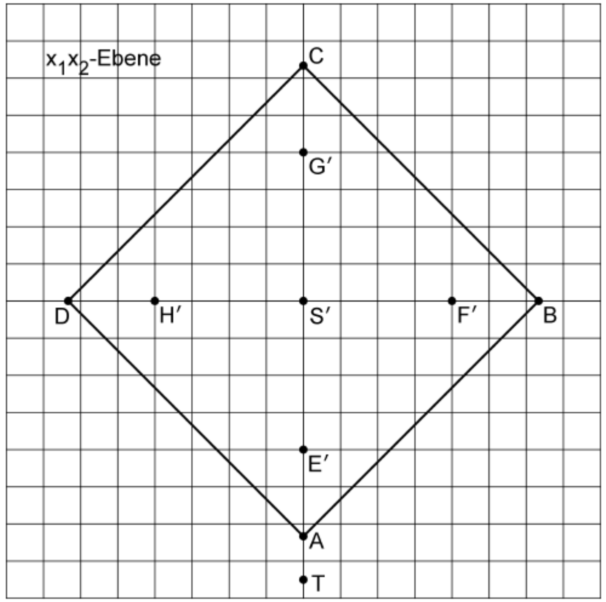


Abb. 3

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten von T.

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Der Schattenbereich der gesamten Pyramide auf dem Boden besteht im Modell aus zwei kongruenten Vierecken. Zeichnen Sie diesen Schattenbereich in Abbildung 3 ein und geben Sie die besondere Form der genannten Vierecke an.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Gegeben ist die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Lagebeziehung Gerade und Ebene

Richtungsverktor der Geraden g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

> Erläuterung: *Skalarprodukt*
>
> Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.
>
> $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0$

> Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*
>
> Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.
>
> Der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g. Somit sind Ebene und Gerade parallel zu einander.

$\Rightarrow \quad g$ ist parallel zur Ebene

Aufpunkt $(0|1|1)$ der Geraden in die Ebene einsetzen:

$0 + 1 + 1 = 2$

$2 = 2$

$\Rightarrow \quad g$ liegt in der Ebene

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Lagebeziehung von Geraden

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Windschiefe Geraden*

Zwei Geraden g und h sind windschief, wenn die Richtungsvektoren kein Vielfaches voneinander sind und sich die Geraden nicht schneiden. Das ist der Fall wenn das Gleichungssystem, das beim Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen entsteht, nicht aufgeht.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 1 & = & k \\ 0 & = & k\,a \\ -1 & = & 0 \quad \text{Widerspruch} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander

$\Rightarrow$ g und h_a sind nicht parallel und nicht identisch

Geraden schneiden: $g \cap h_a$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = +\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \lambda & = & \mu \\ 1 & = & \mu\,a \\ -\lambda & = & 0 \end{array}$$

Aus $\lambda = 0$ folgt, dass $\mu = 0$ und somit in der 2. Gleichung $1 = 0$, was ein Widerspruch ist.

$\Rightarrow$ g und h_a sind zueinander windschief

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(19|0|0)$, $B(0|19|0)$, $E(12|0|7)$ und $F(0|12|7)$ (vgl. Abbildung 1). Das Viereck ABFE liegt in der Ebene L.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABFE ein Trapez mit zwei gleich langen Seiten ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist in Vielfaches vom Vektor $\overrightarrow{EF}$. Somit sind die Vektoren parallel zueinander.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{19}{12} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{19}{12} \cdot \overrightarrow{EF}$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$

$\Rightarrow$ Das Viereck ist ein Trapez

Länge eines Vektors

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \left|\overrightarrow{BF}\right|$$

$\Rightarrow$ Das Trapez hat zwei gleich lange Seiten

Erläuterung:

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Teilaufgabe Teil B b (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform sowie die Größe φ des Winkels, den L mit der $x_1 x_2$-Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$; $\varphi \approx 55°$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene L:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{(s. Teilaufgabe Teil B a)}$$

A sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene L.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_L}$ der Ebene L bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 133+0 \\ 0+133 \\ 0+133 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 133 \\ 133 \\ 133 \end{pmatrix} = 133 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\dfrac{1}{133}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_L} = \frac{1}{133} \cdot 133 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$L : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_L}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$$L : x_1 + x_2 + x_3 = 19 + 0 + 0$$

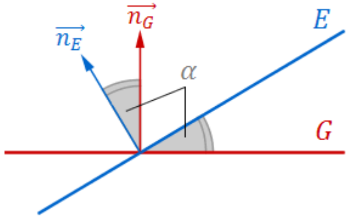
$$L : x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Normalenvektor $\overrightarrow{n_L}$ der Ebene L: $\quad \overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene L und der x_1x_2-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der x_1x_2-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,7^\circ$$

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEFGH, bei dem die quadratische Grundfläche ABCD parallel zur quadratischen Deckfläche EFGH liegt.
Der Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene. Außerdem werden die Punkte $S_k(0|0|k)$ mit $k \in]7; +\infty[$ betrachtet, die Spitzen von Pyramiden EFGHS$_k$ sind.

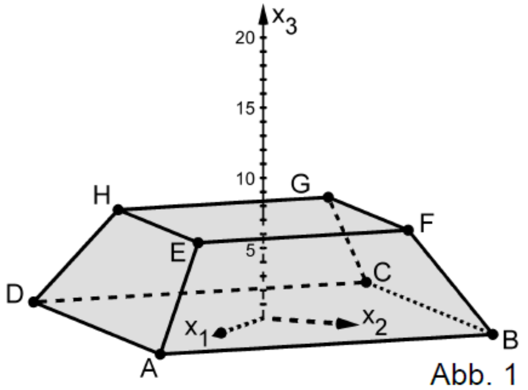


Abb. 1

Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von k, für den die Pyramide EFGHS$_k$ den Körper ABCDEFGH zu einer großen Pyramide ABCDS$_k$ ergänzt.

(zur Kontrolle: $k = 19$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Lage eines Punktes

$L: x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$

$S_k \in L \quad \Longleftrightarrow \quad 0 + 0 + k - 19 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 19$

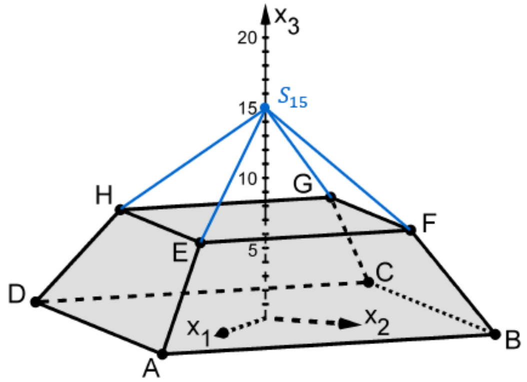
Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Zeichnen Sie die Pyramide EFGHS$_{15}$ in Abbildung 1 ein. Die Seitenfläche EFS$_{15}$ und die Grundfläche EFGH dieser Pyramide schließen einen Winkel ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Größe dieses Winkels kleiner als 45° ist; verwenden Sie dazu folgende Information:

Für den Mittelpunkt M des Quadrats EFGH und den Punkt N mit $\overrightarrow{N} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{F}\right)$ gilt $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Winkel zwischen zwei Ebenen



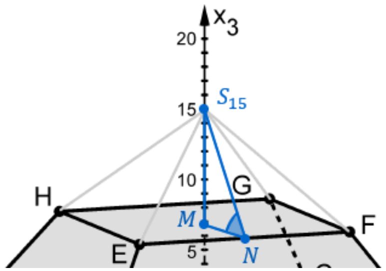
Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

N ist der Mittelpunkt der Strecke [EF].

Erläuterung:



Die Größe des betrachteten Winkels ist gleich der Größe des Innenwinkels des rechtwinkligen Dreiecks $\mathrm{S}_{15}\mathrm{NM}$ bei N.

Erläuterung:

Wegen $\overline{\mathrm{MS}_{15}} < \overline{\mathrm{MN}}$ ist der Winkel bei N im Dreieck $\mathrm{S}_{15}\mathrm{NM}$ kleiner als der bei S_{15}. Wegen der Innenwinkelsumme ist die Summe der beiden Winkel gleich $90°$ und daher ist der Winkel bei N kleiner als $45°$.

Wegen $\overline{\mathrm{MS}_{15}} < \overline{\mathrm{MN}}$ ist dieser kleiner als $45°$

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Der Körper $\mathrm{ABCDEFGHS}_{15}$ stellt modellhaft die Knickpyramide des Pharaos Snofru dar, die ca. 2650 v. Chr. in Ägypten erbaut wurde (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 7 m in der Realität.

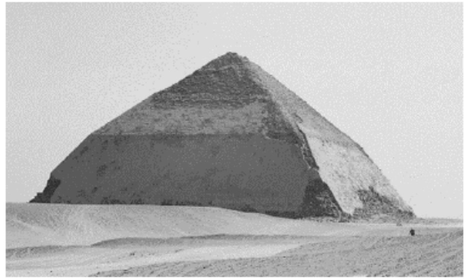


Abb. 2

Ursprünglich wurde mit dem Bau einer Pyramide begonnen, die im Modell der Pyramide ABCDS_{19} entspricht. Aufgrund von Stabilitätsproblemen im Bauprozess musste die Neigung der Seitenflächen gegenüber dem Boden beim Erreichen einer bestimmten Höhe verändert werden. Der entstandene Knick ist namensgebend für die Pyramide.

Bestimmen Sie die Höhenänderung des Bauwerks, die durch die Bauplanänderung hervorgerufen wurde, in Metern. Begründen Sie, dass im unteren Teil des Bauwerks der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden um mehr als $9°$ größer ist als im oberen Teil des Bauwerks.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Anwendungsaufgabe

$19 - 15 = 4$

Höhenänderung: $4 \cdot 7 = 28$ m

Erläuterung:

Der Winkel, der die Seitenflächen im unteren Bauwerk mit der Horizontalen bilden, ist $55°$ groß (s. Teilaufgabe Teil B b).

Der Winkel, der die Seitenflächen im obere Bauwerk mit der Horizontalen bilden, ist kleiner als $45°$ (s. Teilaufgabe Teil B d).

$55° - 45° > 9°$

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen auf die Knickpyramide Sonnenstrahlen, die im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_{15}E}$ dargestellt werden. Der Schatten der Spitze der Knickpyramide auf dem horizontalen Boden wird durch den Punkt T beschrieben.
Die Lote durch die Punkte E, F, G, H und S_{15} auf die x_1x_2-Ebene schneiden diese in den Punkten E', F', G', H' bzw. S'. Diese sind zusammen mit der Grundfläche der Pyramide und dem Punkt T in Abbildung 3 dargestellt.

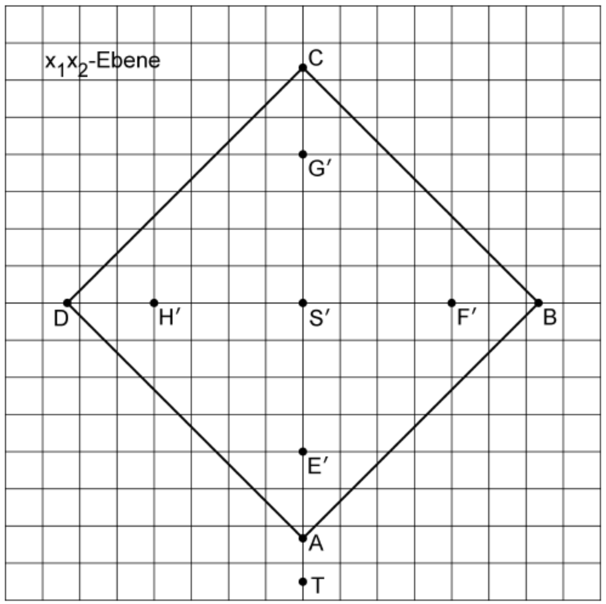


Abb. 3

Berechnen Sie die Koordinaten von T.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Geradengleichung aufstellen

Gerade $S_{15}E$ aufstellen:

$$\overrightarrow{S_{15}E} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{S_{15}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn hier $S_{15}E$ als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{S_{15}E}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden $S_{15}E$.

$$S_{15}E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnitt Ebene und Gerade

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad$ (Gleichung der x_1x_2-Ebene)

Gerade mit Ebene schneiden:

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also $S_{15}E$ in die x_1x_2-Ebene eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$15 - 8\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{15}{8}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\lambda = \dfrac{15}{8}$ wird in die Geradengleichung der Geraden eingesetzt.

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{15}{8} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(22,5|0|0)$$

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Der Schattenbereich der gesamten Pyramide auf dem Boden besteht im Modell aus zwei kongruenten Vierecken. Zeichnen Sie diesen Schattenbereich in Abbildung 3 ein und geben Sie die besondere Form der genannten Vierecke an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Projektion

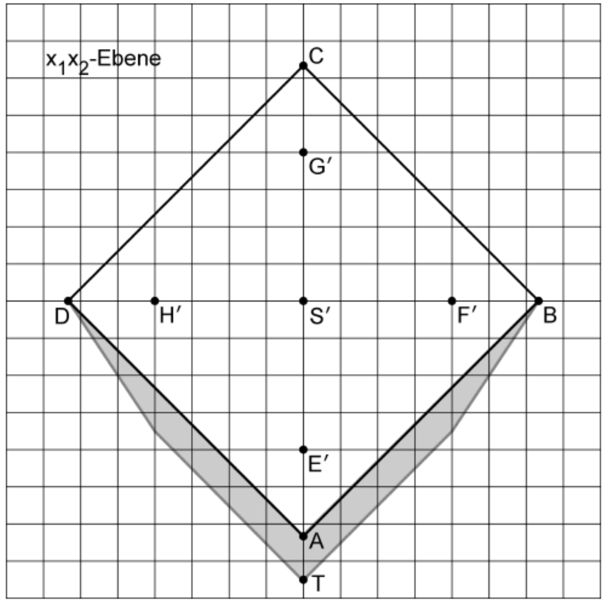


Abb. 3

Die beiden Vierecke sind Trapeze.