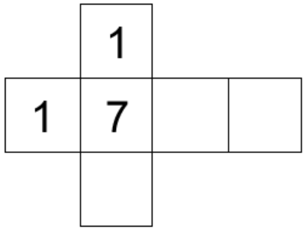
Abitur 2022 Mathematik Stochastik IV

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt.

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24% der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30% der Befragten nicht. Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

B: „Die Person kennt die Aktion 'Baumpatenschaft'.“
U: „Die Person kennt die Aktion 'Umweltwoche'.“

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind.

Teilaufgabe Teil B 1b (1 BE)

Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpatenschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt.

Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022“ an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind. Für einen Einsatz von 3 € darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen. Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2 € ausbezahlt. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.

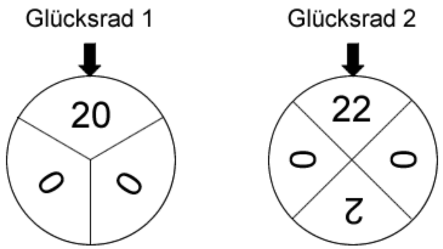


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2.

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300 € beträgt.

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022“.

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindestens 4 € ausbezahlen muss.

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe 12 € ergeben.

Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 8$ und p_X besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

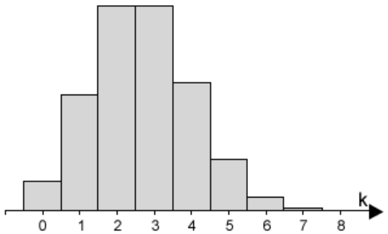


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_X.

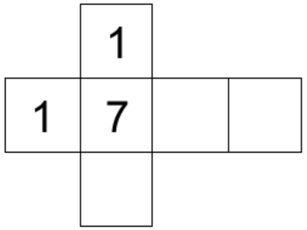
Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_Y = 1 - p_X$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeit

E: „Zahl 1 zum ersten Mal nach genau viermal Würfeln“

$$P(\text{„Zahl 1“}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

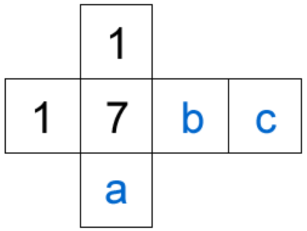
$$P(E) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^3}_{\text{3x keine 1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Erwartungswert einer Zufallsgröße



Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 7 + \frac{1}{6} \cdot a + \frac{1}{6} \cdot b + \frac{1}{6} \cdot c$$

Erläuterung:

Der Erwartungswert für die erzielte Zahl soll $\frac{31}{6}$ betragen.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{7}{6} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c = \frac{31}{6} \qquad | \cdot 6$$

$$1 + 1 + 7 + a + b + c = 31$$

$$a + b + c = 22$$

Seitenbeschriftung: z.B. $2, 10, 10$ oder auch $6, 8, 8$ usw.

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24% der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30% der Befragten nicht.
Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

B: „Die Person kennt die Aktion 'Baumpatenschaft'.“
U: „Die Person kennt die Aktion 'Umweltwoche'.“

Weisen Sie nach, dass die Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Stochastische Unabhängigkeit

Text analysieren und Daten herauslesen:

„Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion 'Baumpatenschaft'“ $\Rightarrow \quad P(B) = \frac{1}{5}$

“ 24% der Befragten kennen keine der beiden Aktionen“ $\Rightarrow \quad P\left(\overline{B} \cap \overline{U}\right) = 0,24$

„die Aktion 'Umweltwoche' kennen 30% der Befragten nicht“ $\Rightarrow \quad P\left(\overline{U}\right) = 0,3$

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$P\left(\overline{B}\right) \cdot P\left(\overline{U}\right) = \dfrac{4}{5} \cdot 0{,}3 = 0{,}24 = P\left(\overline{B} \cap \overline{U}\right)$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, dann sind es auch ihre Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$.

$\Rightarrow \quad B$ und U sind stochastisch unabhängig

Teilaufgabe Teil B 1b (1 BE)

Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpatenschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt.

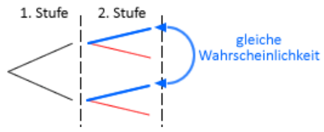
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Stochastische Unabhängigkeit

$P_B\left(\overline{U}\right) = P\left(\overline{U}\right) = 0{,}3$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis immer dieselbe, unabhängig von einer Bedingung. Somit sind im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der Äste der zweiten Stufe, die in die gleiche Richtung (oben bzw. unten) zeigen, gleich.



Sind A und B stochastisch unabhängig, dann gilt:

$P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) = P(A)$

Dementsprechend auch: $P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) = P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\right)$

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022“ an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind. Für einen Einsatz von 3 € darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen. Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2 € ausbezahlt. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.

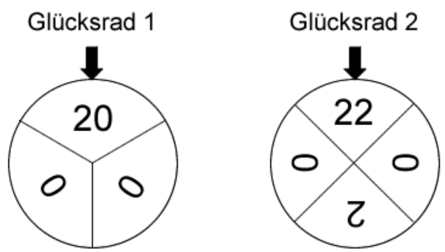


Abb. 1

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2.

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

Wird die Ziffer 2 insgesamt 1-Mal erreicht, dann ist sie **entweder** beim Drehen des Glücksrads 1 und dann nicht beim Drehen des Glücksrads 2 vorgekommen **oder** genau umgekehrt.

$$p_1 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{1x in Glücksrad 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{0x in Glücksrad 2}} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{0x in Glücksrad 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{1x in Glücksrad 2}}$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

Wird die Ziffer 2 insgesamt 2-Mal erreicht, dann ist sie **entweder** 1-Mal beim Drehen des Glücksrads 1 und 1-Mal dann beim Drehen des Glücksrads 2 vorgekommen **oder** kein Mal beim Drehen des Glücksrads 1 und 2-Mal (Sektor Zahl 22) beim Drehen des Glücksrads 2.

$$p_2 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{1x in Glücksrad 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{1x in Glücksrad 2}} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{0x in Glücksrad 1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{2x in Glücksrad 2}}$$

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Erläuterung:

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gleich 1.

Überprüfung: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 1$

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300 € beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n$$

Hier wird die Einnahme als Zufallsgröße betrachtet, die sich aus Einsatz (3€) minus Auszahlung (2€ pro erzielte Ziffer 2) zusammen setzt.

- 0-Mal Ziffer 2 ⇒ keine Auszahlung und die Einnahme beträgt 3€ (Einsatz).
- 1-Mal Ziffer 2 ⇒ 1 Auszahlung und die Einnahme beträgt 3€ - 2€ = 1€.
- 2-Mal Ziffer 2 ⇒ 2 Auszahlungen und die Einnahme beträgt 3€ - 4€ = -1€.
- 3-Mal Ziffer 2 ⇒ 3 Auszahlungen und die Einnahme beträgt 3€ - 6€ = -3€.

$$E(E) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{12} \cdot (-3) = \frac{5}{6}\text{ €}$$

Anzahl Spiele: $\dfrac{300\text{ €}}{\frac{5}{6}\text{ €}} = 360$

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022“.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindestens 4 € ausbezahlen muss.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Binomialverteilung

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Erläuterung:

„Mindestens 4 € ausbezahlen“ tritt ein, wenn entweder 2-Mal oder 3-Mal die Ziffer 2 getroffen wird. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten werden aus der Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung entnommen.

$$p = P(Z \geq 2) = P(Z = 2) + P(Z = 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 8$ (Anzahl Personen) mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \dfrac{1}{3}$ angesehen werden.

$P(\text{„mehr als zweimal“}) = P_{\frac{1}{3}}^{8}(X > 2)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(\text{„mehr als k Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchsten k Treffer“})$

In mathematischen Zeichen:

$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$

$$P_{\frac{1}{3}}^{8}(X > 2) = 1 - P_{\frac{1}{3}}^{8}(X \leq 2) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0{,}46822 \approx 53{,}18\%$$

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe 12 € ergeben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Wahrscheinlichkeit

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

E: „die ersten drei Personen erhalten drei unterschiedliche Beträge, die in Summe 12 € ergeben“

Erläuterung: *Permutation*

Unterschiedliche Beträge sind 2 ($k=1$, also der Fall 1-Mal Ziffer 2), 4 ($k=2$, also der Fall 2-Mal Ziffer 2) und 6 ($k=3$, also der Fall 3-Mal Ziffer 2). Ihre Summe ergibt 12.

$$\Rightarrow \quad P(Z=1)\cdot P(Z=2)\cdot P(Z=3)$$

Es gibt 3! Möglichkeiten die 3 Beträge auf die ersten 3 Personen zu verteilen.

$$\Rightarrow \quad 3!\cdot P(Z=1)\cdot P(Z=2)\cdot P(Z=3)$$

$$P(E)=3!\cdot P(Z=1)\cdot P(Z=2)\cdot P(Z=3)=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n=8$ und p_X besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

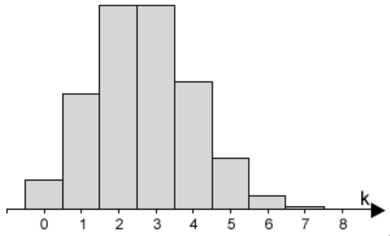


Abb. 2

Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_X.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Standardabweichung einer Zufallsgröße

$n=8;\ p_X;\ \sigma=\frac{4}{3}$

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt für die Standardabweichung (Streuung) von X:

$$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

$$\sqrt{8\cdot p_X\cdot(1-p_X)}=\frac{4}{3} \qquad |^2$$

$$8\cdot p_X\cdot(1-p_X)=\frac{16}{9}$$

$$-8p_X^2+8p_X-\frac{16}{9}=0 \qquad |:(-8)$$

$$p_X^2-p_X+\frac{2}{9}=0$$

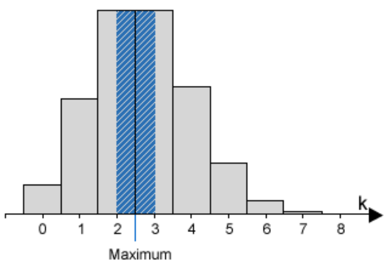
$$p_{X_{1,2}}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot\frac{2}{9}}}{2}=\frac{1\pm\frac{1}{3}}{2}$$

$$p_{X_1}=\frac{1}{3};\ P_{X_2}=\frac{2}{3}$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt:

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p$



Bei binomialverteilten Zufallsgrößen liegt das Maximum stets beim Erwartungswert. Hier an der Abbildung ca. bei 2,5 abzulesen.

$\mu = 8 \cdot \dfrac{1}{3} \approx 2,67$

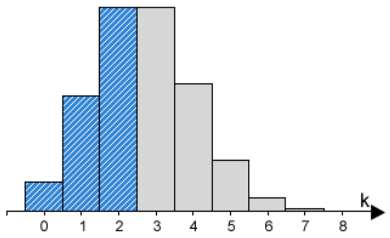
Wegen $\mu = n \cdot p_X$ kann man bei gegebenem $n = 8$ anhand der Abbildung schlussfolgern, dass $p_X = \dfrac{1}{3}$ sein muss.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_Y = 1 - p_X$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Wahrscheinlichkeitsverteilung



Erläuterung:

$p_Y = 1 - p_X$ entspricht der Wahrscheinlichkeit für eine Niete der Zufallsgröße X.

$Y \geq 6$ bedeutet also „mindesten 6 Nieten“ , also anders ausgedrückt „höchstens 2 Treffer“.

$\Rightarrow \quad P(Y \geq 6) = P(X \leq 2)$

$\Rightarrow \quad P(Y \geq 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$