Abitur 2022 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3|-6|5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5|-4|1)$ auf K liegt.

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Untersuchen Sie, ob K die x_1x_2-Ebene schneidet.

Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Bestimmen Sie die Länge der Strecke [PQ]. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke [PQ] Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist.

(zur Kontrolle: $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}$)

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

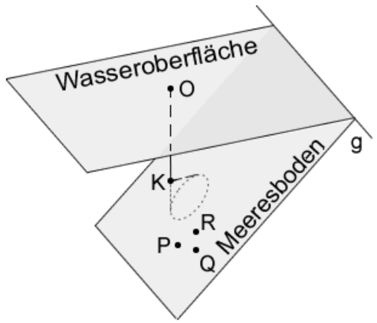
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt.

(zur Kontrolle: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (1 BE)

Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2-Ebene liegt.

In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2-Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt.

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke.

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K dargestellt wird.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht.

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von 90° (vgl. Abbildung).
Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3|-6|5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.

Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5|-4|1)$ auf K liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Kugel

$M(3|-6|5)$
$r = 2\sqrt{6}$

Erläuterung: *Kugelgleichung*

Die Gleichung einer Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r ist gegeben durch:

$K: \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{M}\right]^2 = r^2$

$$K: \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (x_1-3)^2 + (x_2+6)^2 + (x_3-5)^2 = 24$$

Lage eines Punktes

$P(5|-4|1)$

Erläuterung: *Einsetzen*

Liegt ein Punkt auf einer Kugel, so erfüllen sein Punktkoordinaten die Kugelgleichung.

$$(5-3)^2 + (-4+6)^2 + (1-5)^2 = 4+4+16 = 24 \quad\Rightarrow\quad P \in K$$

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Untersuchen Sie, ob K die $x_1 x_2$-Ebene schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Schnitt Kugel - Ebene

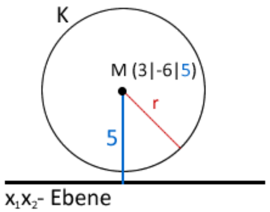
$M(3|-6|5)$

$r = 2\sqrt{6}$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Der Abstand des Mittelpunktes M zur $x_1 x_2$-Ebene entspricht seiner x_3 Koordinate, also 5.

Da der Radius der Kugel kleiner ist als 5, kann die Kugel die $x_1 x_2$-Ebene nicht schneiden.



$d(M, x_1 x_2\text{-Ebene}) = x_{3_M} = 5 > 2\sqrt{6} = r \quad \Rightarrow \quad K$ schneidet nicht die $x_1 x_2$-Ebene

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Länge der Strecke [PQ]. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke [PQ] Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist.

(zur Kontrolle: $\overline{\text{PQ}} = 3\sqrt{2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

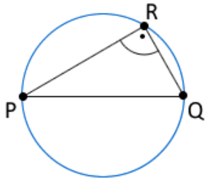
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} \circ \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$$

Thaleskreis



R liegt auf dem Thaleskreis über der Strecke [PQ].

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt.

(zur Kontrolle: $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} \times \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{3}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E\colon \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (P ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P}}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 - 5 - 38$

$E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -35$

Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebene E und Gerade g schneiden: $\quad E \cap g$

$$\begin{aligned} E \cap g: \quad 2(-12+\lambda) - (11+2\lambda) + 2\cdot 0 &= -35 \\ -24 + 2\lambda - 11 - 2\lambda &= -35 \\ -35 &= -35 \quad \text{(wahre Aussage)} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Lagebeziehung von Ebene und Gerade*

Mögliche Lagen einer Gerade zu einer Ebene:
enthalten, parallel, Schnitt (Schnittpunkt)

Überprüfung: Ebene und Gerade scheiden.

Möglichkeiten:

Parameter bleibt stehen (z.B. $\lambda = 1$) $\quad \Rightarrow \quad$ **Schnittpunkt**

Parameter fällt weg und die Aussage ist wahr (z.B. $0 = 0$)
$\Rightarrow$ Gerade ist in der Ebene **enthalten**

Parameter fällt weg und die Aussage ist falsch (z.B. $2 = 1$)
$\Rightarrow$ Gerade liegt **parallel** zur Ebene

$\Rightarrow \quad g$ ist in E enthalten ($g \subset E$)

Teilaufgabe Teil B c (1 BE)

Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2-Ebene liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

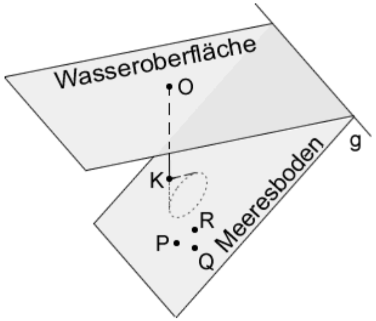
Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g liegt in der x_1x_2-Ebene, da Sowohl die x_3-Koordinate des Aufpunktes als auch des Richtungsvektors 0 ist.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

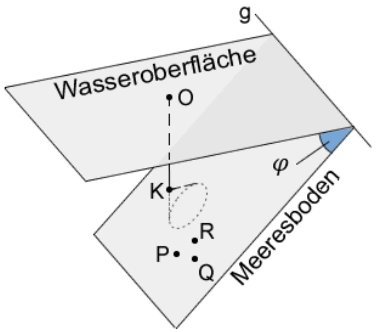
In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2-Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Winkel zwischen zwei Ebenen

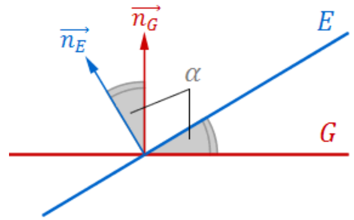


$E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -35$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E: $\quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der x_1x_2-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1\,x_2$-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0+0+2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{9}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,19^\circ$$

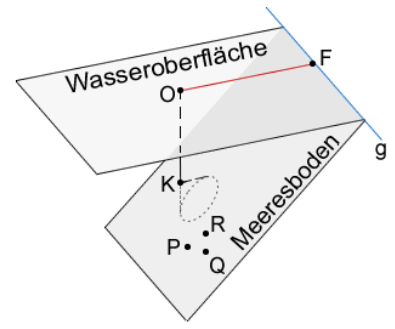
Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke.

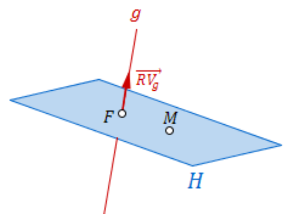
Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Abstand Punkt - Gerade



Abstand von O zu $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmen:

Erläuterung: *Hilfsebene*



Um den Abstand zwischen einer Geraden g und einen Punkt M bestimmen zu können, bildet man eine Hilfsebene H die den Punkt M beinhaltet und senkrecht zur Geraden g steht.

Diese Ebene schneidet dann die Gerade g in einem Punkt F. Der Abstand entspricht dann der Länge der Strecke [MF].

Hilfsebene H durch O senkrecht zu g aufstellen:

$$\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E\colon \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (O ist Aufpunkt):

$$H: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_H}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{O}}$$

$H: x_1 + 2x_2 = 0$

Ebene H und Gerade g schneiden: $H \cap g$

$$\begin{aligned} H \cap g: \quad -12 + \lambda + 2 \cdot (11 + 2\lambda) &= 0 \\ -12 + \lambda + 22 + 4\lambda &= 0 \\ 5\lambda + 10 &= 0 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

$\lambda = -2$ in g einsetzen und Schnittpunkt F bestimmen:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(-14|7|0)$$

Abstand von O zu F bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right| = \left| \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-14)^2 + 7^2 + 0} = \sqrt{245} = \sqrt{7^2 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$$

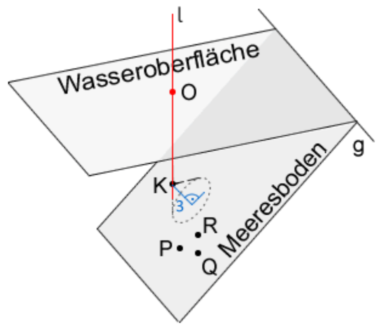
Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K dargestellt wird.

Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Geradengleichung aufstellen



Senkrechte Gerade l durch O (also parallel zur x_3-Achse) aufstellen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Wenn hier O als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{O}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden l.

$$l : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{O}} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$l : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K(0|0|\mu)$$

Abstand Punkt - Ebene

$E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenvektor der Ebene}$$

$$|\,\overrightarrow{n_E}\,| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}} : \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{\text{HNF}} : \frac{1}{3}\,(2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35) = 0$$

Abstand Ebene zu Geradenpunkt gleich 3 setzen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}} : \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$\left| \frac{1}{3}\,(0 + 0 + 2\mu + 35) \right| = 3$$

$$\left| \frac{1}{3}\,(2\mu + 35) \right| = 3$$

$$\frac{2\mu + 35}{3} = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \mu = -13 \quad (\mu = -22)$$

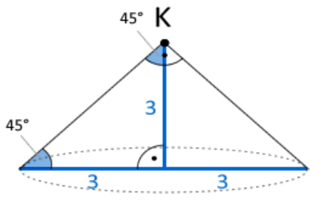
Tauchtiefe: 13 m

Teilaufgabe Teil B g (3 BE)

Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von 90° (vgl. Abbildung).
Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks



Erläuterung: *Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck*

Im Kegel bildet jede Mantellinie mit dem zugehörigen Radius der Grundfläche sowie der Höhe des Kegels (= 3, siehe Angabe zur Teilaufgabe Teil B f) ein gleichschenkliges-rechtwinkliges Dreieck.
Der Radius hat somit Läge 3. Der Durchmesser dementsprechend $3 \cdot 2 = 6$.

Durchmesser der Grundfläche des Kegels: 6 m

Durchmesser Thaleskreis über [PQ]: $3\sqrt{2}$ m

$6 > 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad$ er erreicht eine solche Stelle