Abitur 2021 Mathematik Stochastik IV

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X=0)=P(X=5)$, $P(X=1)=P(X=4)$ und $P(X=2)=P(X=3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist.

Ein Süßwarenunternehmen stellt verschiedene Sorten Fruchtgummis her.

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben.

Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25% beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

$$\sum_{k=0}^{3} \left(0,75^k \cdot 0,25\right)$$

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42% der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63% der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet."
R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet."

Teilaufgabe Teil B 3a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{R}$.

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{V}}(R)$.

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P_{\overline{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

Teilaufgabe Teil B 4a (3 BE)

Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X.

Teilaufgabe Teil B 4b (2 BE)

Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.

Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E\ (Y_n) = n$ und $\text{Var}\ (Y_n) = n$. Bestimmen Sie den Wert von n, für den die relative Standardabweichung 5% beträgt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d. h. es gilt $P(X = 0) = P(X = 5)$, $P(X = 1) = P(X = 4)$ und $P(X = 2) = P(X = 3)$.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \le k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \le k)$	0,05	0,20	0,50			

Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \le k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1

Erläuterung: *kumulative Verteilungsfunktion*

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k - 1) + P(X = k)$$

Aus $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ folgt durch Umstellung:

$$P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X = 0)$$

$P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X = 0) = 0,20 - 0,05 = 0,15$

Erläuterung: *kumulative Verteilungsfunktion*

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k-1) + P(X = k)$$

Aus $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ folgt durch Umstellung:

$$P(X = 2) = P(X \le 2) - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X = 2) = P(X \le 2) - P(X = 0) - P(X = 1) = 0{,}50 - 0{,}05 - 0{,}15 = 0{,}3$$

Erläuterung: *kumulative Verteilungsfunktion*

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k-1) + P(X = k)$$

Aus obiger Definition geht hervor:

$$P(X \le k) = \underbrace{P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k-1)}_{P(X \le k-1)} + P(X = k)$$

$$P(X \le k) = P(X \le k-1) + P(X = k)$$

$$P(X \le 3) = P(X \le 2) + \underbrace{P(X = 3)}_{=P(X=2)} = 0{,}50 + 0{,}3 = 0{,}8$$

$$P(X \le 4) = P(X \le 3) + \underbrace{P(X = 4)}_{=P(X=1)} = 0{,}8 + 0{,}15 = 0{,}95$$

$$P(X \le 5) = P(X \le 4) + \underbrace{P(X = 5)}_{=P(X=0)} = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Binomialverteilung

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \le k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1

$n = 5$

Aus Symmetriebedingung folgt: $p = 0{,}5$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(X = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$$

X ist nicht binomialverteilt, da z.B. $P_{0,5}^5(X = 0) = 0{,}5^5 = \frac{1}{32} \neq 0{,}05$.

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

Ein Süßwarenunternehmen stellt verschiedene Sorten Fruchtgummis her.

Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1

Wahrscheinlichkeit

5 weiß
2 rot
3 grün

Erläuterung:

Nur im Falle von weißen oder grünen Gummibärchen kann der Fall von 3 gleichen Gummibärchen vorkommen.

3 x Weiße Gummibärchen:

Beim 1. Ziehen gibt es 5 weiße Gummibärchen von 10 $\quad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{10}$

Beim 2. Ziehen gibt es nur noch 4 weiße Gummibärchen von 9 (1 wurde ja bereits gezogen) $\quad \Rightarrow \quad p = \frac{4}{9}$

Beim 3. Ziehen gibt es nur noch 3 weiße Gummibärchen von 8 (2 wurde ja bereits gezogen) $\quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{8}$

$$\Rightarrow \quad P(\text{„3 mal weiße Gummibärchen“}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$P(\text{„gleiche Farbe“}) = \underbrace{\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}}_{\text{3 x weiss}} + \underbrace{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}}_{\text{3 x grün}} = \frac{11}{120}$$

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

Alternative Berechnung:

Erläuterung:

$$P(\text{„gleiche Farbe“}) = \underbrace{\frac{\binom{5}{3} \cdot \overbrace{\binom{5}{0}}^{1}}{\binom{10}{3}}}_{\text{3 x weiss}} + \underbrace{\frac{\binom{3}{3} \cdot \overbrace{\binom{7}{0}}^{1}}{\binom{10}{3}}}_{\text{3 x grün}} + = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}$$

$$P(\text{„gleiche Farbe“}) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}$$

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um Ziehen ohne Reihenfolge (welches Gummibärchen wann gezogen wird ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (beim gleichzeitigen Ziehen kann ein gezogenes Gummibärchen nicht erneut gezogen werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

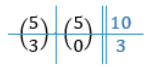
$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \cdot \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

3 von 5 weißen Gummibärchen werden gezogen:
$\Rightarrow |\text{ Treffer}| = \binom{5}{3}$

0 von 5 andere Gummibärchen werden gezogen:
$\Rightarrow |\text{ Niete}| = \binom{5}{0}$

3 von insgesamt 10 Gummibärchen werden gewählt:
$\Rightarrow |\Omega| = \binom{10}{3}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25% beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Binomialverteilung

Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 25\% = 0,25$.

„mehr als ein Drittel“ $\quad \Rightarrow \quad X > \frac{1}{3} \cdot 50 \quad \Longleftrightarrow \quad X \geq 17$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(„mindestens k Treffer“) $= 1 - P$(„höchsten k-1 Treffer“)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

$P_{0,25}^{50}(X \geq 17) = 1 - P_{0,25}^{50}(X \leq 16) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,90169 = 0,09831$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

$$\sum_{k=0}^{3} \left(0,75^k \cdot 0,25\right)$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Wahrscheinlichkeit

Von den ersten vier Gummibärchen ist mindestens eines rot.

Erläuterung:

$$\sum_{k=0}^{3} \left(0,75^k \cdot 0,25\right) =$$

$0,75^0 \cdot 0,25$	Entwerder ist 1 von 1 Gummibärchen rot
$+$	oder
$0,75^1 \cdot 0,25$	1 von 2 Gummibärchen rot
$+$	oder
$0,75^2 \cdot 0,25$	1 von 3 Gummibärchen rot
$+$	oder
$0,75^3 \cdot \underbrace{0,25}_{\text{rot}}$	1 von 4 Gummibärchen rot

Teilaufgabe Teil B 2c (4 BE)

Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ ... Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion...“ $\quad \Rightarrow \quad p$ ist gesucht

“ ... mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 95%...“ $\quad \Rightarrow \quad P \geq 0,95$

“ ... **mindestens** ein gelbes Gummibärchen enthalten ist. “ $\quad \Rightarrow \quad X \geq 1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ (Gummibärchen in eine Tüte) mit der Trefferwahrscheinlichkeit p angesehen werden.

$P_p^{50}(X \geq 1) \geq 0,95$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_p^{50}(X = 0) \geq 0,95$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - (1-p)^{50} \geq 0,95 \quad | \quad -1$

$-(1-p)^{50} \geq -0,05 \quad | \quad \cdot(-1)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$(1-p)^{50} \leq 0,05 \quad | \quad \sqrt[50]{}$

$1 - p \leq \sqrt[50]{0,05} \quad | \quad -1$

$-p \leq -1 + \sqrt[50]{0,05} \quad | \quad \cdot(-1)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$p \geq 1 - \sqrt[50]{0,05}$

$\Rightarrow \quad p \geq 0,058$

Teilaufgabe Teil B 3a (3 BE)

Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42% der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63% der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet.“
R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{R}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Baumdiagramm erstellen

Text analysieren und Daten herauslesen:

„Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind.“

$\Rightarrow \quad P\left(\overline{V}\right) = 3 \cdot P(V)$

Erläuterung: *Rechenweg*

Aus $P\left(\overline{V}\right) + P(V) = 1$ folgt: $P\left(\overline{V}\right) = 1 - P(V)$

Eingesetzt in $P\left(\overline{V}\right) = 3 \cdot P(V)$ egibt:

$1 - P(V) = 3 \cdot P(V) \qquad | + P(V)$

$1 = 4 \cdot P(V) \qquad | : 4$

$P(V) = \dfrac{1}{4} = 0,25$

$\Rightarrow \quad P(V) = 0,25;\ P\left(\overline{V}\right) = 0,75$

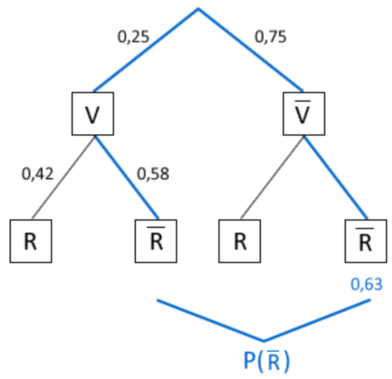
" 42% der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet."

$\Rightarrow \quad P_V\ (R) = 0,42$

" Insgesamt sind 63% der Tüten weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet."

$\Rightarrow \quad P\left(\overline{V} \cap \overline{R}\right) = 0,63$

Baumdiagramm zeichnen:



Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P\left(\overline{R}\right) = P\left(V \cap \overline{R}\right) + P\left(\overline{V} \cap \overline{R}\right)$

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$P\left(V \cap \overline{R}\right) = P(V) \cdot P_V\left(\overline{R}\right) = 0,25 \cdot 0,58$

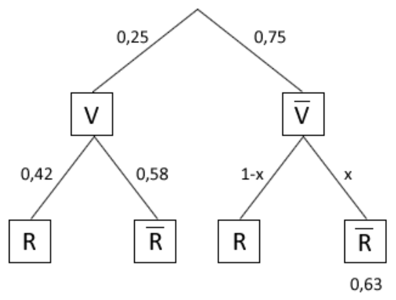
$P\left(\overline{R}\right) = 0,25 \cdot 0,58 + 0,63 = 0,775$

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{V}}(R)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Wahrscheinlichkeit



Erläuterung: *1. Pfadregel*

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$0,63 = P\left(\overline{V} \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{V}\right) \cdot P_{\overline{V}}\left(\overline{R}\right) = 0,75 \cdot x$

$$x = \frac{0,63}{0,75}$$

$$P_{\overline{V}}(R) = 1 - x = 1 - \frac{0,63}{0,75} = 0,16$$

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P_{\overline{V}}(R)$ im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Tüte, die nicht als vegan gekennzeichnet wurde, auch nicht als zuckerreduziert gekennzeichnet wurde.

Teilaufgabe Teil B 4a (3 BE)

Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4a

Erwartungswert einer Zufallsgröße

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeitsverteilung*

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = k)$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X ist gleich 1.

$$p_0 + p_1 + 0,2 + 0,1 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_0 + p_1 = 0,7$$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1$

$1 = p_1 + 0,4 + 0,3 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0,3$

Erläuterung: *Einsetzen*

$p_1 = 0,3$ wird in $p_0 + p_1 = 0,7$ eingesetzt.

$\Rightarrow \quad p_0 = 0,4$

Varianz einer Zufallsgröße

$\text{Var}(X) = (0-1)^2 \cdot 0,4 + (1-1)^2 \cdot 0,3 + (2-1)^2 \cdot 0,2 + (3-1)^2 \cdot 0,1$

$\text{Var}(X) = 0,4 + 0 + 0,2 + 0,4 = 1$

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Die Varianz einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 4) ist definiert als:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

Teilaufgabe Teil B 4b (2 BE)

Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.

Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E\,(Y_n) = n$ und $\text{Var}\,(Y_n) = n$. Bestimmen Sie den Wert von n, für den die relative Standardabweichung 5% beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 4b

Standardabweichung einer Zufallsgröße

Es soll gelten:

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Für die Standardabweichung σ einer Zufallsgröße X gilt:

$\sigma = \sqrt{\text{Var X}}$

$$\frac{\sqrt{\text{Var}\,(Y_n)}}{E\,(Y_n)} = 5\%$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = 0,05$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,05 \qquad |^{-1}$$

$$\sqrt{n} = \frac{1}{0,05} = 20 \qquad |^{2}$$

$n = 400$