Abitur 2021 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ und maximalem Definitionsbereich.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $2 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{dx}$.

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

$W =]-\infty; 1]$

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

$W =]3; +\infty[$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Betrachtet werden eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q\ (2|p(2))$.

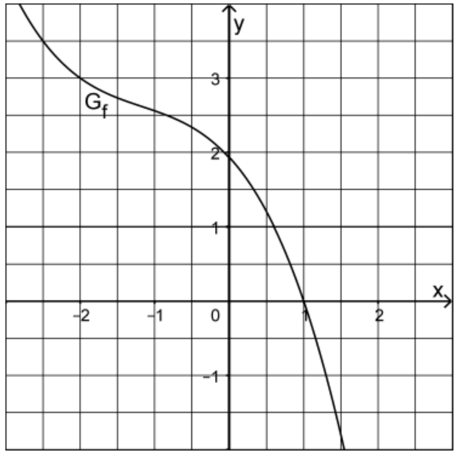
Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto a\,x^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1|0)$ die Tangente mit der Gleichung $y = -x + 1$ besitzt. Bestimmen Sie a und c.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$.

Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g.



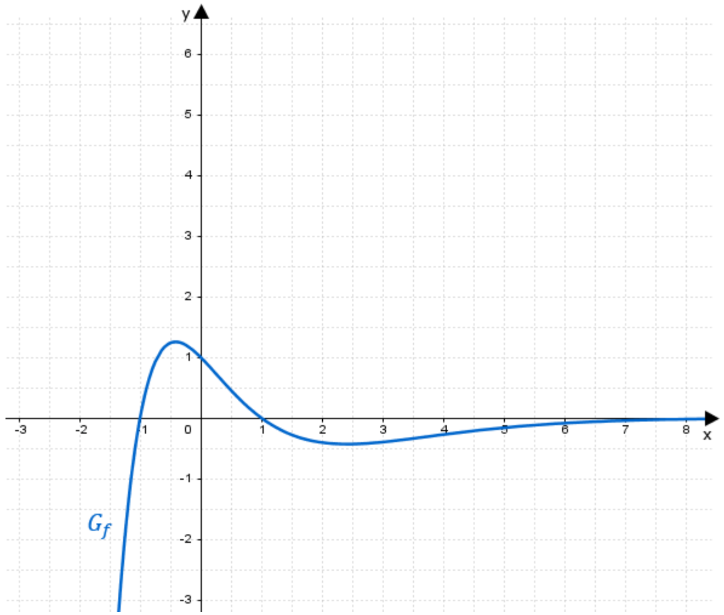
Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot e^{-x}$)

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3,5$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1f (2 BE)

Deuten Sie die Aussage $F(2,5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k : x \mapsto \left(1 - k\,x^2\right) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet.
Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f.

Teilaufgabe Teil B 1g (2 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.

Teilaufgabe Teil B 1h (3 BE)

Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.

Teilaufgabe Teil B 1i (2 BE)

Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

(zur Kontrolle: $g'(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$)

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W\ (0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $]-1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.

Teilaufgabe Teil B 2d (6 BE)

Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x-Achse im Bereich $-\ln 3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert.

Lösung

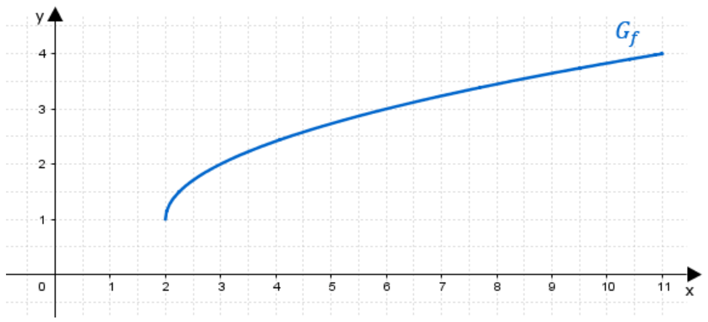
Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ und maximalem Definitionsbereich.

Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $2 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Skizze



Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_2^3 f(x)\ \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Bestimmtes Integral

$$\int\limits_2^3 f(x)\ \mathrm{dx} = \int\limits_2^3 \left(\sqrt{x-2}+1\right)\ \ \mathrm{dx}$$

$$\int_2^3 f(x)\ \mathrm{dx} = \int_2^3 \left((x-2)^{\frac{1}{2}}+1\right)\ \ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regeln zur Bildung der Stammfunktion von $(x-2)^{\frac{1}{2}}+1$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ \ \mathrm{dx} \quad = \quad \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} + \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

Angewendet auf die Funktion der Aufgabe:

$$\int_2^3 \left((x-2)^{\frac{1}{2}}+1\right)\ \ \mathrm{dx} = \int_2^3 (x-2)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{dx} + \int_2^3 \underbrace{1}_{=x^0}\ \mathrm{dx}$$

$$\int_2^3 \left((x-2)^{\frac{1}{2}}+1\right)\ \ \mathrm{dx} = \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + x$$

$$\int_2^3 f(x)\ \mathrm{dx} = \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + x\right]_2^3$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^3 f(x)\ \mathrm{dx} = \frac{2}{3}(3-2)^{\frac{3}{2}} + 3 - \frac{2}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}} - 2$$

$$\int_2^3 f(x)\ \mathrm{dx} = \frac{2}{3} + 3 - 2 = \frac{5}{3}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

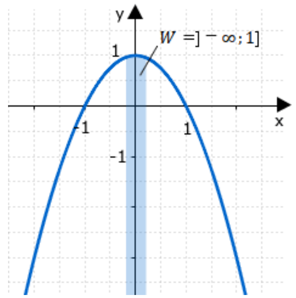
Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

$W =]-\infty; 1]$

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wertemenge einer Funktion

z.B. $f(x) = -x^2 + 1$



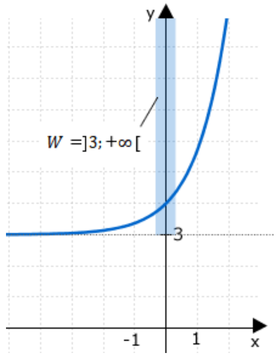
Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

$W =]3; +\infty[$

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Wertemenge einer Funktion

z.B. $f(x) = e^x + 3$



Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Betrachtet werden eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q\ (2|p(2))$.

Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann.

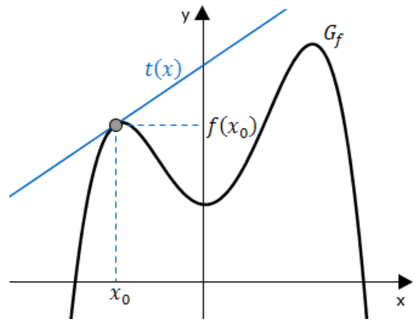
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Tangentengleichung ermitteln

$y = p'(2)(x-2) + p(2)$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Formel für die Tangentengleichung: $t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto a\,x^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1|0)$ die Tangente mit der Gleichung $y = -x + 1$ besitzt. Bestimmen Sie a und c.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Funktionsgleichung ermitteln

$h(x) = a\,x^2 + c$

$h'(x) = 2a\,x$

$N(1|0)$

$y = -x + 1$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

$h'(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$

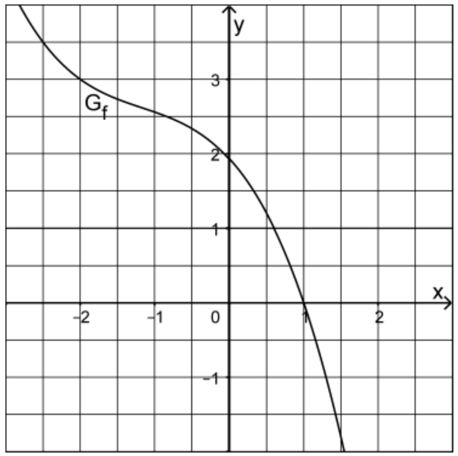
Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Graph G_h verläuft durch den Punkt N. Sein Koordinaten müssen die Funktionsgleichung erfüllen.

$h(1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$.
Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g.



Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Eigenschaften einer Funktion

Wegen $f(1) = 0$ würde bei $g(1)$ im Nenner eine 0 stehen.

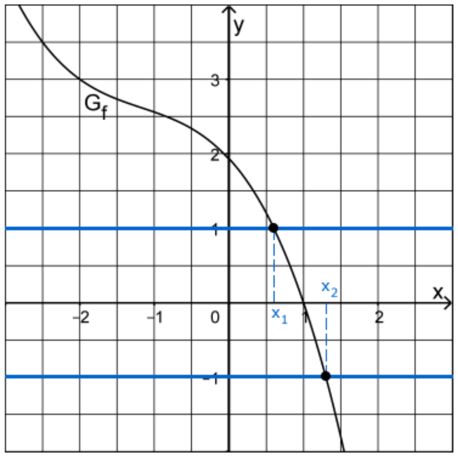
$g(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \frac{1}{3}$

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Schnittpunkt zweier Funktionen



Erläuterung:

Aus $f(x) = g(x)$ und $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ folgt:

$f(x) = \dfrac{1}{f(x)} \qquad | \cdot f(x)$

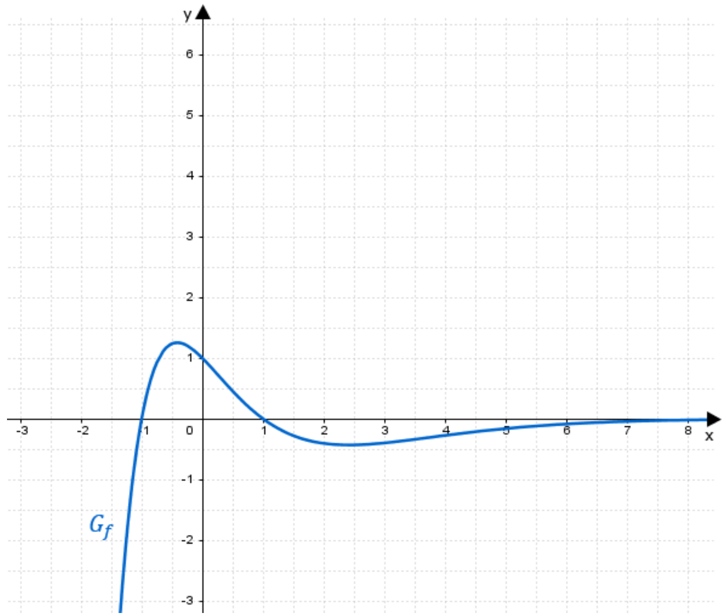
$(f(x))^2 = 1 \qquad |\sqrt{}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \pm 1$

$x_1 \approx 0,6$; $x_2 \approx 1,3$

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Nullstellen einer Funktion

Nullstellen bestimmen: $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$0 = \left(1 - x^2\right) \underbrace{\cdot e^{-x}}_{>0}$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

Da $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $1 - x^2$ untersucht werden.

$1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1;\ x_2 = -1$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot e^{-x}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-x}$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = 1 - x^2$ und $v(x) = e^{-x}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -x$.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x} + \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x} - \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-x}$

$f'(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot e^{-x}$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

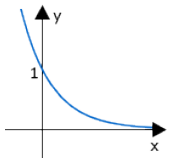
Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Graph der Exponentialfunktion e^{-x}:



Die Exponentialfunktion e^{-x} ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$$\left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

Da $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $x^2 - 2x - 1$ untersucht werden.

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

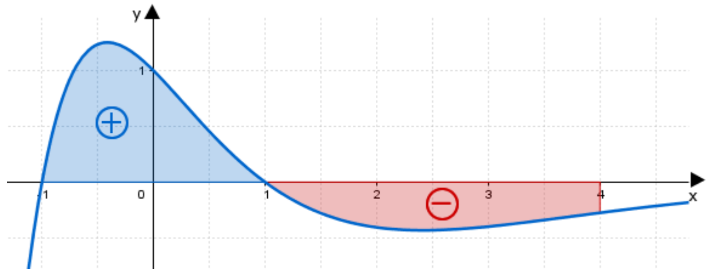
$x_1^E = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41; \quad x_2^E = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41$

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Bestimmtes Integral



ca. 6 Kästchen oberhalb der x-Achse
ca. 4 Kästchen unterhalb der x-Achse

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 6 - 4 = 2 \text{ Kästchen} \approx 0,5$$

Erläuterung:

Das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ entspricht der Differenz (Fläche unterhalb der x-Achse ist negativ) der zwei Flächen die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -1 und 4 einschließt.

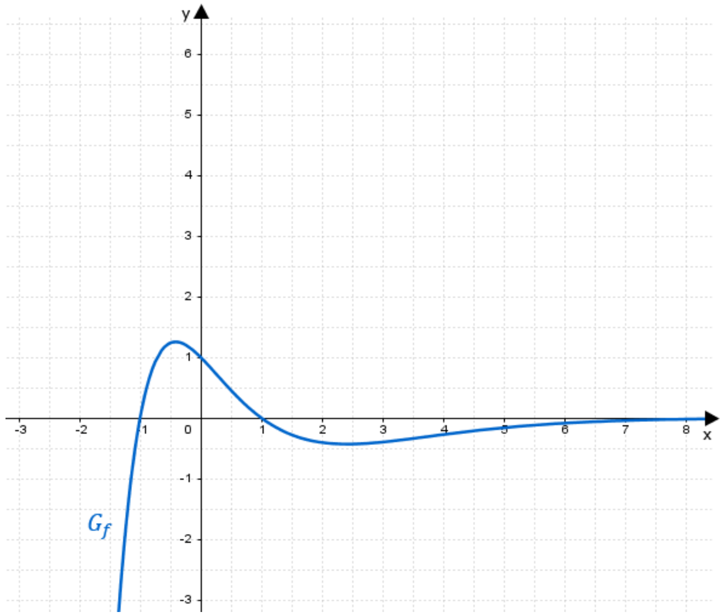
Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Stammfunktion



Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$

$F'(x) = f(x)$

Erläuterung: *Zusammenhang Stammfunktion / Funktion*

Zusammenhang zwischen F und f:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt

f hat an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von “ -“ nach “ +“ .

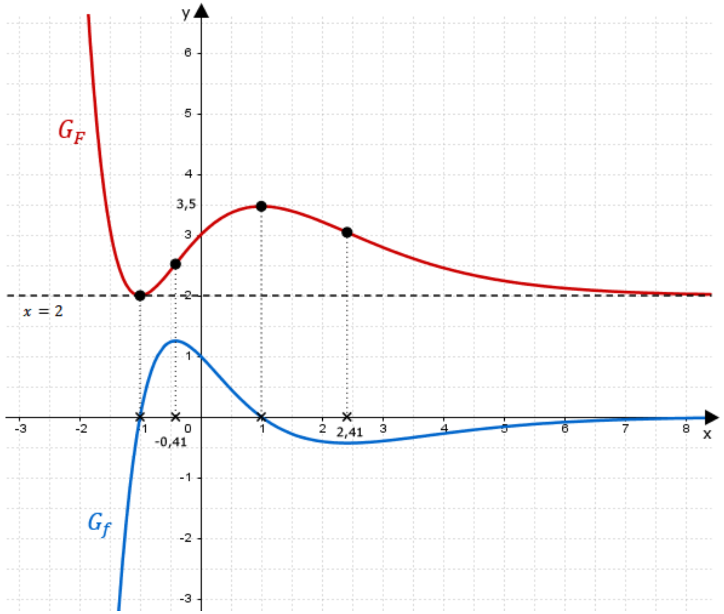
Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3,5$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Graph der Stammfunktion

$x_1^E = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41; \qquad x_2^E = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41 \qquad$ (s. Teilaufgabe Teil B 1b)

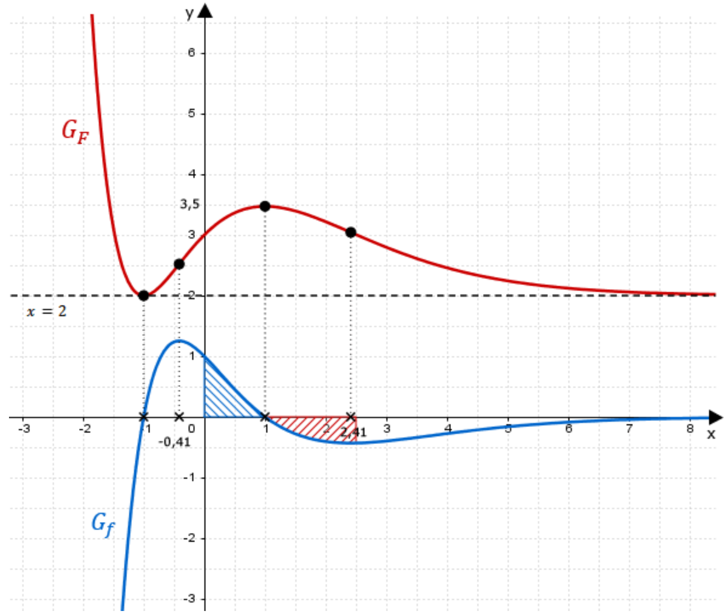


Teilaufgabe Teil B 1f (2 BE)

Deuten Sie die Aussage $F(2,5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Geometrische Interpretation eines Integrals



Im Bereich $[0; 2,5]$ ist die Fläche, die der Graph von f oberhalb der x-Achse mit dieser einschließt, genauso groß wie die Fläche, die er unterhalb der x-Achse mit dieser einschließt.

Anders ausgedrückt: die Flächenbilanz im Bereich $[0; 2,5]$ ist 0.

Teilaufgabe Teil B 1g (2 BE)

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k : x \mapsto \left(1 - k\,x^2\right) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet.
Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f.

Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Nullstellen einer Funktion

$h_k(x) = \left(1 - k\,x^2\right) \cdot e^{-x}$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

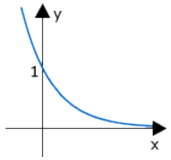
$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$h_k(x) = 0$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Graph der Exponentialfunktion e^{-x}:



Die Exponentialfunktion e^{-x} ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$\left(1 - k\,x^2\right) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

Da $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $1 - k\,x^2$ untersucht werden.

$1 - k\,x^2 = 0$

$x^2 = \dfrac{1}{k}$

$k > 0$: 2 Nullstellen $\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{k}}$

$k \leq 0$: keine Nullstellen

Teilaufgabe Teil B 1h (3 BE)

Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1h

Nullstellen einer Funktion

$1 - k\,x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{k}}$ $\quad$ s. Teilaufgabe Teil B 1g

$\sqrt{\dfrac{1}{k}} = -\sqrt{\dfrac{1}{k}} + 4 \qquad \left|\, +\sqrt{\dfrac{1}{k}}\right.$

$2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{k}} = 4$

$\sqrt{\dfrac{1}{k}} = 2 \qquad |^2$

$\dfrac{1}{k} = 4$

$k = \dfrac{1}{4} = 0,25$

Teilaufgabe Teil B 1i (2 BE)

Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1i

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f(0) = 1$

$h_k(0) = 1 \neq -1$

$\Rightarrow$ es gibt kein solches k

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

(zur Kontrolle: $g'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Monotonieverhalten einer Funktion

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = e^x$ und $v(x) = e^x + 1$.
Dann ist $u'(x) = e^x$ und $v'(x) = e^x$.

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion e^x ist gleich der Funktion selbst.

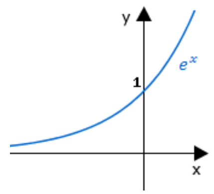
$$g'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ untersuchen:

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$$g'(x) = \frac{\overbrace{e^x}^{>0}}{\underbrace{(e^x + 1)^2}_{>0}} > 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton steigend.

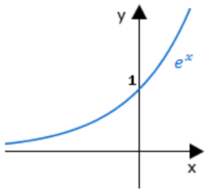
Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow$ streng monoton steigend

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{\underbrace{e^x}_{\to 0}+1}_{\to 1}} = 0$$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

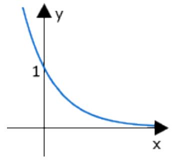


$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x+1}_{\to\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x\cdot\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} = 1$$

Erläuterung: *Exponentialfunktion*

Graph der Exponentialfunktion e^{-x}:



$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W\ (0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

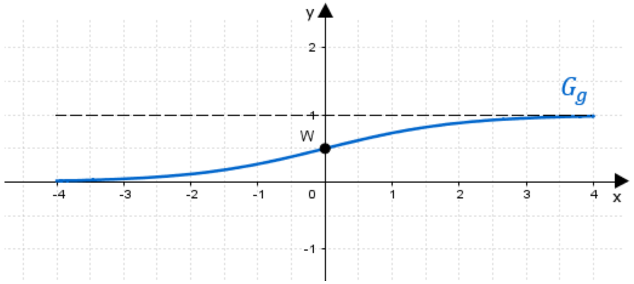
Skizze

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(0) = \frac{e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$g(0) = \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{2} \qquad W(0|0,5)$$



Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

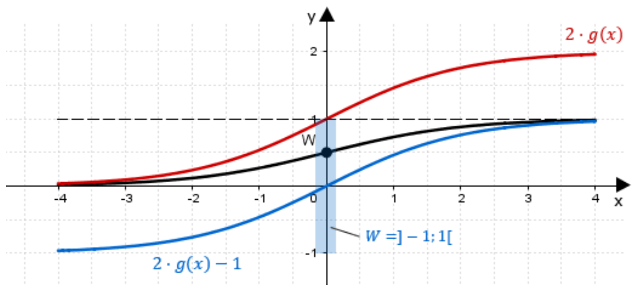
Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $]-1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$g^*(x) = 2 \cdot \frac{e^x}{e^x+1} - 1$$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

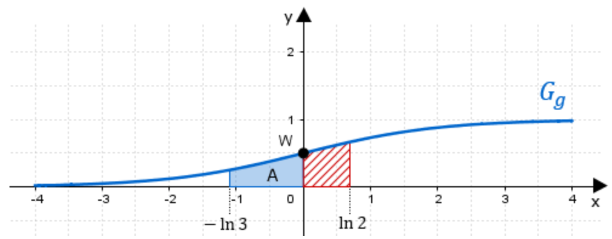


Teilaufgabe Teil B 2d (6 BE)

Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x-Achse im Bereich $-\ln 3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Flächenberechnung



Flächeninhalt bis zur y-Achse:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_g mit der x-Achse zwischen $-\ln 3$ und 0 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_{-\ln 3}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\, \mathrm{dx}$$

$$A = \int_{-\ln 3}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\, \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Logarithmisches Integrieren*

Ist g eine Funktion der Form $g(x) = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$, so gilt:

$$\int g(x)\ \mathrm{dx} = \ln|h(x)|$$

Hier ist $h(x) = e^x + 1$ und $h'(x) = e^x$ (Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion e^x ist die Funktion selbst).

$A = [\ln|e^x + 1|]_{-\ln 3}^{0}$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$A = \ln\left|e^0 + 1\right| - \ln\left|e^{-\ln 3} + 1\right|$

Erläuterung: *Potenzregel*

Regel: $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

$\Rightarrow \quad e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{e^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad A = \ln 2 - \ln\left(\dfrac{1}{3} + 1\right) = \ln 2 - \ln\dfrac{4}{3}$

$A = \ln 2 - \ln\dfrac{4}{3}$

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Quotienten / Differenzvon Logarithmen:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln 2 - \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{2}{\frac{4}{3}} = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{4}\right) = \ln\frac{3}{2}$$

$A = \ln\dfrac{3}{2}$

Es soll also gelten: $\displaystyle\int_0^b \frac{e^x}{e^x + 1}\ \mathrm{dx} = \ln\frac{3}{2}$

$[\ln|e^x + 1|]_0^b = \ln\dfrac{3}{2}$

$\ln|e^b + 1| - \ln|e^0 + 1| = \ln\dfrac{3}{2}$

Erläuterung:

Da $e^b + 1 > 0$ fallen die Betragsstriche aus $\ln|e^b + 1|$ weg.

$\ln\left(e^b + 1\right) - \ln 2 = \ln\dfrac{3}{2} \qquad | + \ln 2$

$\ln\left(e^b + 1\right) = \ln\dfrac{3}{2} + \ln 2$

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Produkts/ Summe von Logarithmen:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = \ln 3$$

$\ln\left(e^b+1\right)=\ln 3 \qquad |e^x$

$e^b+1=3$

$e^b=2 \qquad |\ln x$

$b=\ln 2$