Abitur 2021 Mathematik Geometrie VI

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt $P(104|-42|10)$ beschrieben, seine Richtung durch den Vektor $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der $x_2\,x_3$-Ebene liegt und den Mittelpunkt $M(0|0|20)$ sowie den Radius 3 hat.
Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft.

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche ABCD mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat EFGH mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$.
Der Mittelpunkt S des Quadrats $A\,B\,C\,D$ ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der $x_1\,x_3$-Ebene als auch bezüglich der $x_2\,x_3$-Ebene.

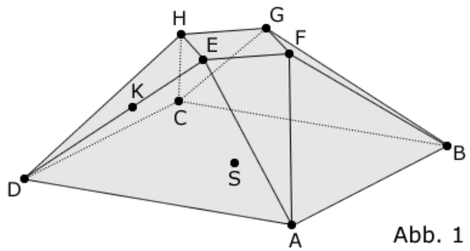


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Auf der Strecke [DE] gibt es einen Punkt K, für den $\overline{\text{KE}} = \overline{\text{EF}}$ gilt.

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von K.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

$N(1,6|0|3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [KF]. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden ABFS, HDES bzw. EFGHS ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide ABFS hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide HDES hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.

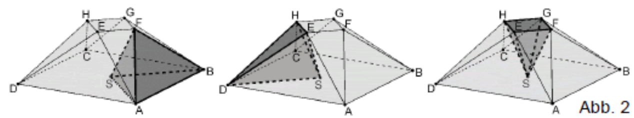


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt $P(104|-42|10)$ beschrieben, seine Richtung durch den Vektor $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der x_2x_3-Ebene liegt und den Mittelpunkt $M(0|0|20)$ sowie den Radius 3 hat.
Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Geradengleichung aufstellen

Gerade g durch $P(104|-42|10)$ mit Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufstellen:

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:
>
> $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$
>
> Wenn P als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{P}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt Ebene und Gerade

x_2x_3-Ebene mit Gerade g schneiden und Schnittpunkt ermitteln:

Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad$ (Gleichung der x_2x_3-Ebene)

> Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*
>
> Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.
>
> Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.
>
> Hier wird also g in die x_2x_3-Ebene eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$104 - 13\lambda = 0$

$\lambda = 8$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $\lambda = 8$ wird in die Geradengleichung der Geraden g eingesetzt.

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(0|-2|18) \text{ Schnittpunkt}$$

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} < 3 = r$$

Der Punkt F liegt auf der Kreisscheibe.

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche ABCD mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat EFGH mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$.
Der Mittelpunkt S des Quadrats $ABCD$ ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene.

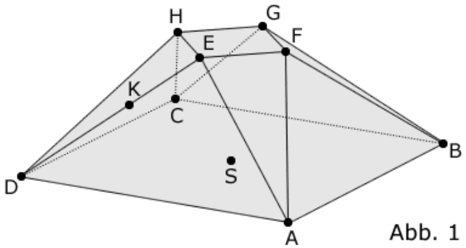
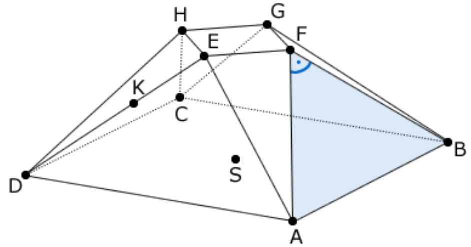


Abb. 1

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung von Vektoren



$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\overrightarrow{FB} \circ \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -25 + 9 + 16 = 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{FB} \perp \overrightarrow{FA}$$

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebene aus drei Punkte

$A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $F(0|2|4)$

Richtungsvektoren der Ebene W:

$$\overrightarrow{\mathrm{FB}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

F sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene W.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_W}$ der Ebene W bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FB}} \times \overrightarrow{\mathrm{FA}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $-\frac{1}{10}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_W} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (F ist Aufpunkt):

$$W: \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_W}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{F}}$$

$W: 4x_2 + 3x_3 = 0 + 8 + 12$

$W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$

Lagebeziehung Gerade und Ebene

W ist parallel zur x_1-Achse.

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

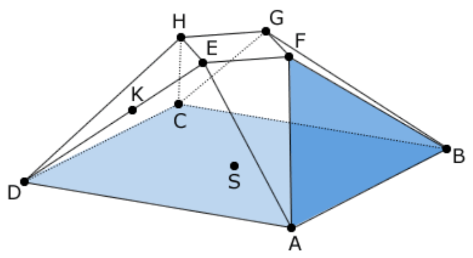
Wegen $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_W}} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ steht der Normalenvektor der Ebene W senkrecht zur x_1-Achse, d.h. die Ebene verläuft parallel dazu.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Winkel zwischen zwei Ebenen



Erläuterung: *Lagebeziehung*

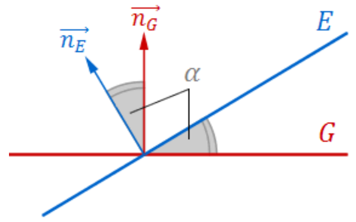
Die Seitenfläche ABF liegt in der Ebene W (s. Teilaufgabe Teil B b) und die Grundfläche ABCD in der x_1x_2-Ebene nach Konstruktion.

$W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_W}$ der Ebene W: $\quad \overrightarrow{n_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene W und der x_1x_2-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 3}{\sqrt{0 + 4^2 + 3^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,13°$$

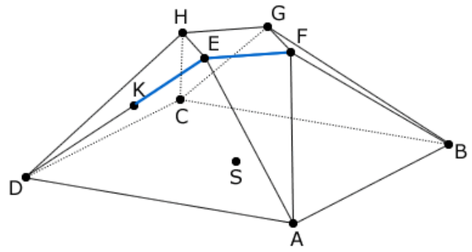
Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Auf der Strecke [DE] gibt es einen Punkt K, für den $\overline{\text{KE}} = \overline{\text{EF}}$ gilt.

Bestimmen Sie die Koordinaten von K.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Lage eines Punktes



$E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $D(5|-5|0)$

$$\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{ED}} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{\text{EF}}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{\text{ED}}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Um zum Punkt K zu gelangen, bewegt man sich vom Punkt E aus, entlang der Geraden ED. Der normierte Richtungsvektor $\overrightarrow{ED}^0$ der Geraden hat Länge 1 und gibt die Richtung an. Dieser Vektor passt dann $\overline{EF}$-mal zwischen E und D rein.

$\overrightarrow{K} = \overrightarrow{E} + 2\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{ED}^0$

Erläuterung: *Einheitsvektor*

Ein Einheitsvektor (normierter Vektor) hat die Länge 1.
Um den Einheitsvektor zu einem gegebenen Vektor zu bestimmen, muss durch den Betrag des Vektors geteilt werden:

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$$

Der Einheitsvektor $\overrightarrow{a}^0$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{a}$, hat aber die Länge 1.

$$\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -2 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

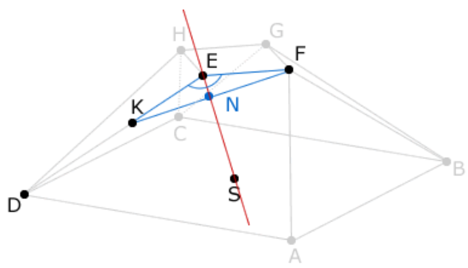
$K(3,2|-2|2,4)$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

$N(1,6|0|3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [KF]. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks



Das Dreieck △KFE ist gleichschenklig, da $\overline{\text{KE}} = \overline{\text{EF}}$ (s. vorherige Teilaufgabe).

[EN] ist somit Seitenhalbierende und Winkelhalbierende zugleich.

Geradengleichung aufstellen

Richtungsvektor der Geraden $g_{E,N}$:

$$\overrightarrow{\text{NE}} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0 \\ 3,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn E als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{E}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden $g_{E,N}$.

$$g_{E,N}: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{E}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung Punkt und Gerade

Prüfen, ob S auf der Geraden $g_{E,N}$ liegt:

Erläuterung: *Einsetzen*

Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so erfüllen sein Punktkoordinaten die Geradengleichung.

Hier wird der Punkt B in die Geradengleichung von $g_{E,N}$ eingesetzt.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}0,4\\0\\0,8\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{c}\lambda=-5\\0=0\\\lambda=-5\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad S\in g_{E,N}$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden ABFS, HDES bzw. EFGHS ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide ABFS hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide HDES hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.

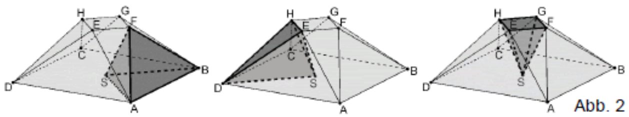


Abb. 2

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

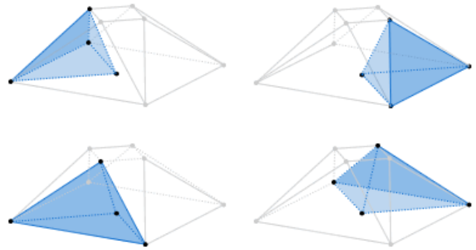
Volumen einer Pyramide

Volumen des gesamten Körpers:

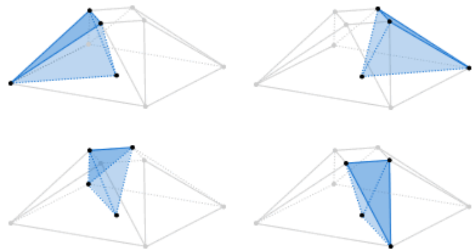
Erläuterung:

Das Volumen des gesamten Körpers teilt sich auf in:

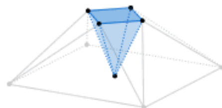
- 4 x das Volumen der Pyramide ABFS



- 4 x das Volumen der Pyramide HDES

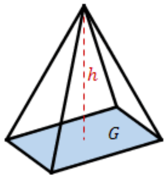


- 1 x das Volumen der Pyramide EFGHS



$V_{\text{Gesamt}} = 4 \cdot 33\frac{1}{3} + 4 \cdot 13\frac{1}{3} + V_{\text{EFGHS}}$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

In diesem Fall ist $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{8}$ (s. Teilaufgabe Teil B d) und somit $G = \sqrt{8}^2$, da nach Konstruktion EFGH ein Quadrat ist. Die Höhe h entspricht der x_3-Koordinate der Punkte E, F, G, H, also 4.

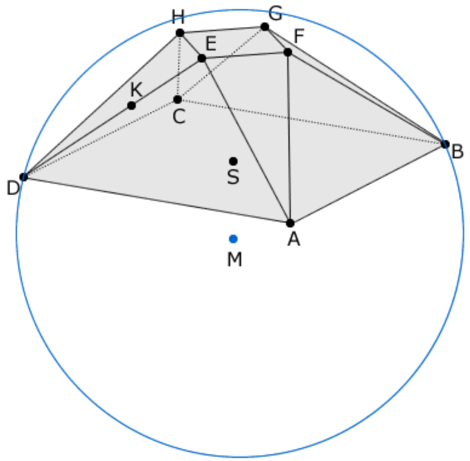
$V_{\text{Gesamt}} = 4 \cdot 33\frac{1}{3} + 4 \cdot 13\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{8}^2\right) \cdot 4 = \frac{592}{3} \approx 197,33$

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Lage eines Punktes



$E(2|0|4)$, $A(5|5|0)$

Erläuterung:

Aus Symmetriegründen liegt der Mittelpunkt M auf der x_3 -Achse.

$M(0|0|x_3)$

$$\overrightarrow{\text{ME}} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{MA}} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ME}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 - x_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (4 - x_3)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -x_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-x_3)^2}$$

Erläuterung:

Alle Punkte auf einer Kugel haben gleichen Abstand zum Mittelpunkt der Kugel.

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ME}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right|$$

$$4 + (4 - x_3)^2 = 50 + x_3^2$$

$$4 + 16 - 8x_3 + x_3^2 = 50 + x_3^2$$

$$-8x_3 = 30$$

$$x_3 = -3,75$$

$$\Rightarrow \qquad M(0|0| - 3,75)$$