Abitur 2021 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie eine weitere Gerade h, welche parallel zu g ist und durch den Punkt $A(2|0|0)$ verläuft. Der Punkt B liegt auf g so, dass die Geraden AB und h senkrecht zueinander sind.

Teilaufgabe Teil A a (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von B.

(zur Kontrolle: $B(-2|3|2)$)

Teilaufgabe Teil A b (1 BE)

Berechnen Sie den Abstand von g und h.

Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punkts D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

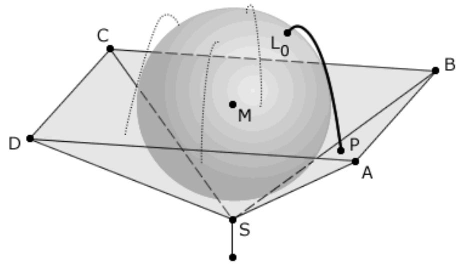
(zur Kontrolle: $F : x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide ABCDS.

(zur Kontrolle: $V = 72$)

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide ABCDS beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r. Die x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.

(zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$)

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0(1|1|6)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t\left(t+1|t+1|6,2-5\cdot(t-0,2)^2\right)$ mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale trifft (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.

Teilaufgabe Teil B h (4 BE)

Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (4 BE)

Gegeben ist die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie eine weitere Gerade h, welche parallel zu g ist und durch den Punkt $A(2|0|0)$ verläuft. Der Punkt B liegt auf g so, dass die Geraden AB und h senkrecht zueinander sind.

Bestimmen Sie die Koordinaten von B.

(zur Kontrolle: $B(-2|3|2)$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Ebenengleichung in Normalenform

Hilfsebene H senkrecht zu h durch A bilden:

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$
>
> Hier (A ist Aufpunkt):

$$H: \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\mathrm{RV}_g}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$H: 3x_1 + 4x_2 = 6$

Schnitt Ebene und Gerade

Ebene H mit Gerade g schneiden: $\quad H \cap g$

Erläuterung: *Einsetzen*

Schneidet eine Gerade $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also g in die H eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$3(1 + 3\lambda) + 4(7 + 4\lambda) = 6$

$3 + 9\lambda + 28 + 16\lambda = 6$

$25\lambda = -25$

$\lambda = -1$

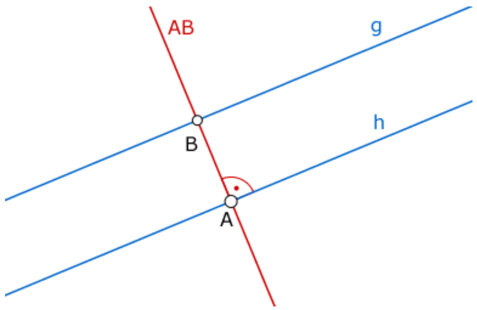
Erläuterung: *Einsetzen*

$\lambda = -1$ wird in die Geradengleichung der Geraden eingesetzt.

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B(-2|3|2)$

Alternative Lösung



Erläuterung: *Lage des Punktes*

Der Punkt B liegt auf der Geraden g und erfüllt somit für ein bestimmtes λ die Geradengleichung.

$B(1 + 3\lambda|7 + 4\lambda|2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\mathrm{RV}_g}} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$-3 + 9\lambda + 28 + 16\lambda = 0$

$25\lambda + 25 = 0$

$\lambda = -1$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\lambda = -1$ wird in $B(1 + 3\lambda|7 + 4\lambda|2)$ eingesetzt.

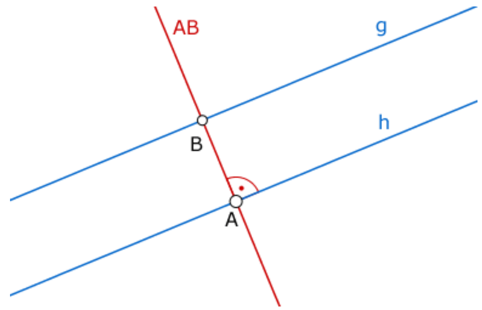
$\Rightarrow \quad B(-2|3|2)$

Teilaufgabe Teil A b (1 BE)

Berechnen Sie den Abstand von g und h.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Abstand paralleler Geraden



$A(2|0|0)$, $B(-2|3|2)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$d(g, h) = \sqrt{29}$

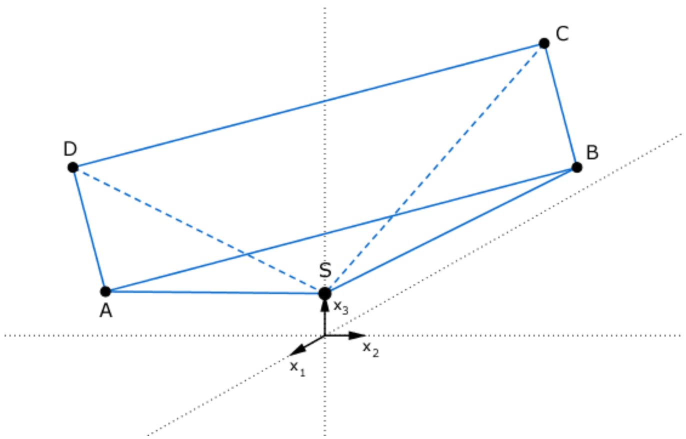
Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in der Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punkts D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Nachweis - gleichschenkliges Dreieck



$$\overrightarrow{\mathrm{SA}} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

Beide Vektoren haben gleichwertige Koordinaten und sind somit gleich lang.

$\Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{SA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{SB}}\right|$

$\Rightarrow \quad \triangle$ABS ist gleichschenklig

Lage eines Punktes

$D(0|-6|4)$

Erläuterung:

D liegt auf der gleichen Höhe wie die Punkte A, B und C, d.h. $x_{3_D} = 4$, und gegenüber von B, also $x_{2_D} = -x_{2_B} = -6$.

Lagebeziehung von Ebenen

Die Ebene E ist parallel zur $x_1\,x_2$-Ebene.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebene aus drei Punkte

$A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $S(0|0|1)$

Richtungsvektoren der Ebene F (s. Teilaufgabe Teil B a):

$$\overrightarrow{\mathrm{SA}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene F.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ der Ebene F bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $-\frac{1}{18}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_F} = -\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (S ist Aufpunkt):

$$F : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_F}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S}}$$

$F : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 + 0 - 2$

$F : x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$

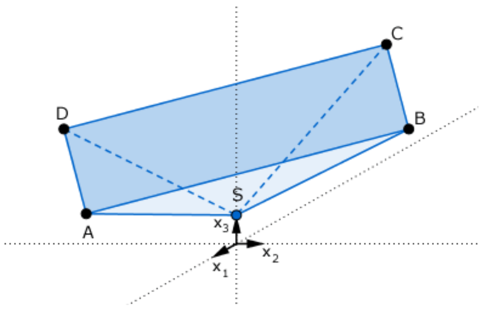
Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide ABCDS.

(zur Kontrolle: $V = 72$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Volumen einer Pyramide



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

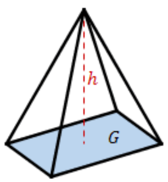
Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0} = \sqrt{72}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{ABCDS}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung:

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenfläche $\overline{AB}$.

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes S zur Ebene E. Da diese parallel zur $x_1 x_2$-Ebene verläuft und der Punkt S auf der x_3-Achse liegt, entspricht die Höhe der Differenz zwischen den x_3-Koordinaten von A (oder eines beliebig anderen Punktes der Ebene E) und S.

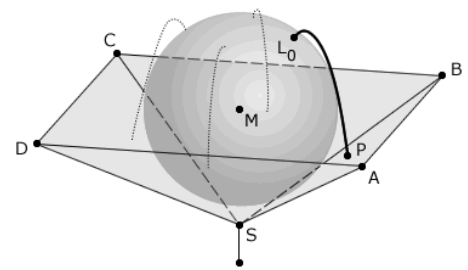
$$h = x_{3_A} - x_{3_S} = 4 - 1 = 3$$

$$V_{\text{ABCDS}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot 3$$

$$V_{\text{ABCDS}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{72}\right)^2 \cdot 3 = 72$$

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramide ABCDS beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r. Die $x_1 x_2$-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau.

(zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Abstand Punkt - Ebene

$M(0|0|4)$

$F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$ (s. Teilaufgabe Teil B b)

$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_F}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

> Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*
>
> Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.
>
> Beispiel:
>
> $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
>
> $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$
>
> $E^{\text{HNF}}: \dfrac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$$F^{\text{HNF}}: \frac{x_1 + x_2 - 2x_3 + 2}{\sqrt{6}} = 0$$

Abstand bestimmen:

> Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*
>
> Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene.
>
> Beispiel:
>
> $E^{\text{HNF}}: \dfrac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$
>
> $P(1|3|-6)$
>
> $d(P,E) = \left| \dfrac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\dfrac{9}{3} \right| = 3$

$$r = d(M,F) = \left| \frac{0 + 0 - 2 \cdot 4 + 2}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-6}{\sqrt{6}} \right| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Durchmesser: $2 \cdot \sqrt{6} \approx 48,99$ cm

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

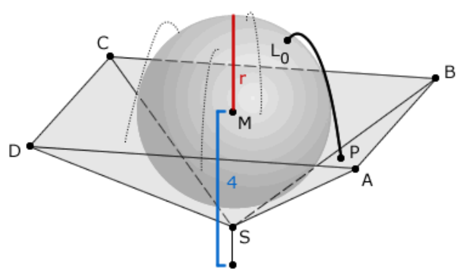
Lage eines Punktes

$(4 + \sqrt{6}) \cdot 10 \approx 64$ cm

Erläuterung:

Vom Ursprung aus zum Mittelpunkt $M(0|0|4)$ sind es 4 Einheiten entlang der x_3-Achse. Vom Mittelpunkt muss man noch einen Radius ($r = \sqrt{6}$) dazu zählen, um an die Oberfläche der Kugel zu kommen.

Da eine Einheit ein Dezimeter entspricht, muss man noch mit 10 multiplizieren, um Zentimeter zu erhalten.



Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0(1|1|6)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t\left(t+1|t+1|6,2-5\cdot(t-0,2)^2\right)$ mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale trifft (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Koordinaten von Punkten ermitteln

$F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$

$L_t\left(t+1|t+1|6,2-5\cdot(t-0,2)^2\right)$

Erläuterung:

Der Punkt P liegt in der Ebene F, da diese laut Angabe von Teilaufgabe Teil B a die Punkte A, B und S beinhaltet.

L_t in F einsetzen:

$$t+1+t+1-2\cdot\left(6,2-5\cdot(t-0,2)^2\right)+2=0$$

$$2t+4-12,4+10\cdot(t-0,2)^2=0$$

$$2t-8,4+10t^2-4t+0,4=0$$

$$10t^2-2t-8=0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2+b\,x+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$t_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 10\cdot(-8)}}{2\cdot 10}=\frac{2\pm\sqrt{4+320}}{20}$$

Erläuterung:

Da $t \in \mathbb{R}_0^+$, d.h. $t \geq 0$, wird t_2 ausgeschlossen.

$$t_1 = 1; \qquad \left(t_2 = -\frac{4}{5} < 0\right)$$

$t = 1$ in L_t einsetzen:

Erläuterung: *Einsetzen*

$$P = L_1\left(1+1|1+1|6,2-5\cdot(1-0,2)^2\right)$$

$P(2|2|3)$

Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Geometrische Anwendung

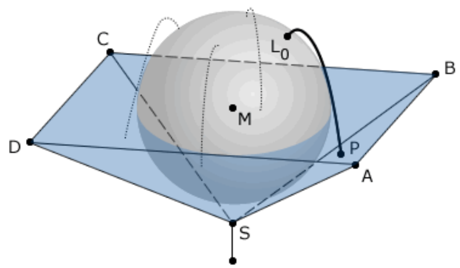
Nein, der höchste Punkt der Wasserfontäne (L_t) liegt nicht höher als der höchste Punkt des Brunnens (64 cm), denn $6,2-5\cdot(t-0,2)^2 \leq 6,2$ für alle $t \geq 0$, d.h. kein Punkt der Fontäne liegt höher als 62 cm über den Erdboden.

Teilaufgabe Teil B h (4 BE)

Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist.

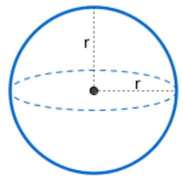
Lösung zu Teilaufgabe Teil B h

Volumen einer Kugel



$V_{\text{ABCDS}} = 72$ (s. Teilaufgabe Teil B c)

Erläuterung: *Volumen einer Kugel*



Eine Kugel mit Radius r hat ein Volumen von:

$$V = \frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3}\pi\cdot\left(\sqrt{6}\right)^3$$

$$\frac{V_{\text{ABCDS}} - V_{\text{Halbkugel}}}{0,08} = \frac{72-\frac{2}{3}\pi\cdot\left(\sqrt{6}\right)^3 \text{ l}}{0,08\frac{1}{\text{s}}} \approx 515 \text{ s}$$