Abitur 2020 Mathematik Stochastik IV

Ein Glücksrad besteht aus zwei unterschiedlich großen Sektoren. Der größere Sektor ist mit der Zahl 1 und der kleinere mit der Zahl 3 beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen des Glücksrads die Zahl 1 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Teilaufgabe Teil A a (1 BE)

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden erzielten Zahlen 4 ist, durch den Term $2p \cdot (1-p)$ angegeben wird.

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden erzielten Zahlen. Bestimmen Sie, für welchen Wert von p die Zufallsgröße X den Erwartungswert 3 hat.

Das Laplace-Gymnasium veranstaltet auf dem Sportplatz ein Fußballturnier für die neuen 5. Klassen.

An dem Turnier nehmen neun Mannschaften teil. Die Mannschaften bestehen jeweils aus Jungen und Mädchen, wobei zwei Drittel aller mitspielenden Kinder männlich sind.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Die drei Spielführerinnen und die sechs Spielführer der Fußballmannschaften stellen sich in einer Reihe für ein Foto auf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der neun Kinder, wenn die drei Spielführerinnen nebeneinanderstehen sollen.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Im Rahmen der Begrüßung durch die Schulleiterin werden aus allen Spielerinnen und Spielern zunächst zehn Kinder ausgelost, die je einen Fußball erhalten sollen. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass fünf Mädchen und fünf Jungen einen Ball erhalten, verwendet Max den Ansatz

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

Geben Sie an, ob Max dabei vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen" oder vom Modell „Ziehen ohne Zurücklegen" ausgeht. Begründen Sie rechnerisch unter Zugrundelegung eines im Sachkontext realistischen Zahlenwerts für die Gesamtzahl der Spielerinnen und Spieler, dass die von Max berechnete Wahrscheinlichkeit nur geringfügig von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit abweicht.

Neben dem Fußballturnier werden für die Schülerinnen und Schüler auch ein Elfmeterschießen und ein Torwandschießen angeboten.

Dafür konnten sich die Kinder in zwei Listen eintragen. 45% der Kinder haben sich sowohl für das Torwandschießen als auch für das Elfmeterschießen eingetragen, 15% haben sich nur für das Elfmeterschießen eingetragen. 90% der Kinder, die sich für das Torwandschießen eingetragen haben, haben sich auch für das Elfmeterschießen eingetragen. Aus den Kindern wird eines zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

T : „Das Kind hat sich für das Torwandschießen eingetragen."
E : „Das Kind hat sich für das Elfmeterschießen eingetragen."

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Untersuchen Sie die Ereignisse T und E auf stochastische Unabhängigkeit.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Drücken Sie jedes der beiden folgenden Ereignisse unter Verwendung der Mengenschreibweise durch T und E aus.

A : „Das Kind hat sich in keine der Listen eingetragen."
B : „Das Kind hat sich in genau eine Liste eingetragen."

Beim Torwandschießen treten zwei Schützen gegeneinander an. Zunächst gibt der eine sechs Schüsse ab, anschließend der andere. Wer dabei mehr Treffer erzielt, hat gewonnen; andernfalls geht das Torwandschießen unentschieden aus.

Joe trifft beim Torwandschießen bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 20%, Hans mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%.

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Joe beim Torwandschießen gegen Hans gewinnt, wenn Hans bei seinen sechs Schüssen genau zwei Treffer erzielt hat. Erläutern Sie anhand einer konkreten Spielsituation, dass das dieser Aufgabe zugrunde gelegte mathematische Modell im Allgemeinen nicht der Realität entspricht.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\sum_{k=0}^{6} \left(B(6;0,2;k) \cdot B(6;0,3;k)\right)$ angegeben wird.

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Lisa erreichte im Training in 90% aller Fälle bei sechs Schüssen mindestens einen Treffer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr erster Schuss im Wettbewerb ein Treffer ist, wenn man davon ausgeht, dass sich ihre Trefferquote im Vergleich zum Training nicht ändert. Legen Sie Ihrer Berechnung als Modell eine geeignete Bernoullikette zugrunde.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (1 BE)

Ein Glücksrad besteht aus zwei unterschiedlich großen Sektoren. Der größere Sektor ist mit der Zahl 1 und der kleinere mit der Zahl 3 beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen des Glücksrads die Zahl 1 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden erzielten Zahlen 4 ist, durch den Term $2p \cdot (1-p)$ angegeben wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Wahrscheinlichkeit

E: „Summe ist gleich 4“

Erläuterung:

Entweder ist die erste Zahl 1 und die zweite 3 ODER die erste Zahl 3 und die zweite 1.

$$P(E) = \underbrace{p}_{1} \cdot \underbrace{(1-p)}_{3} + \underbrace{(1-p)}_{3} \cdot \underbrace{(p)}_{1} = 2p \cdot (1-p)$$

Teilaufgabe Teil A b (4 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden erzielten Zahlen. Bestimmen Sie, für welchen Wert von p die Zufallsgröße X den Erwartungswert 3 hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellen:

x_i	2	4	6
Ereignis	1;1	1;3 oder 3;1	3;3
$P(X = x_i)$	$p \cdot p = p^2$	$2p \cdot (1-p)$	$(1-p) \cdot (1-p)$ $= (1-p)^2$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \dots + x_n\,p_n$$

$E(X) = 2 \cdot p^2 + 4 \cdot 2p \cdot (1-p) + 6 \cdot (1-p)^2$

$E(X) = 2p^2 + 8p - 8p^2 + 6 - 12p + 6p^2$

$E(X) = -4p + 6$

$E(X) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -4p + 6 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \dfrac{3}{4}$

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Das Laplace-Gymnasium veranstaltet auf dem Sportplatz ein Fußballturnier für die neuen 5. Klassen.

An dem Turnier nehmen neun Mannschaften teil. Die Mannschaften bestehen jeweils aus Jungen und Mädchen, wobei zwei Drittel aller mitspielenden Kinder männlich sind.

Die drei Spielführerinnen und die sechs Spielführer der Fußballmannschaften stellen sich in einer Reihe für ein Foto auf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der neun Kinder, wenn die drei Spielführerinnen nebeneinanderstehen sollen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Kombinatorik

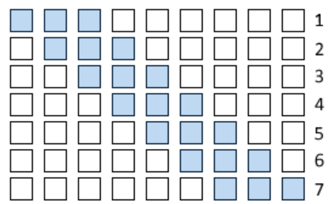
3 Spielführerinnen
6 Spielführer

Erläuterung: *Permutation*

Es gibt 3! Möglichkeiten 3 Spielführerinnen auf 3 Plätze zu verteilen.

Es gibt 6! Möglichkeiten 6 Spielführer auf 6 Plätze zu verteilen.

Es gibt 7 Möglichkeiten die 3 Spielführerinnen hintereinander in eine Reihe von 9 Spieler aufzustellen („Durchschieben“).



$|\Omega| = 3! \cdot 6! \cdot 7$

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Im Rahmen der Begrüßung durch die Schulleiterin werden aus allen Spielerinnen und Spielern zunächst zehn Kinder ausgelost, die je einen Fußball erhalten sollen. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass fünf Mädchen und fünf Jungen einen Ball erhalten, verwendet Max den Ansatz

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

Geben Sie an, ob Max dabei vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ oder vom Modell „Ziehen ohne Zurücklegen“ ausgeht. Begründen Sie rechnerisch unter Zugrundelegung eines im Sachkontext realistischen Zahlenwerts für die Gesamtzahl der Spielerinnen und Spieler, dass die von Max berechnete Wahrscheinlichkeit nur geringfügig von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Ziehen mit Zurücklegen

Max geht vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ aus.

$$\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\approx 13,7\%$$

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

Geht man von 11 Spieler:innen pro Mannschaft aus, stehen bei 9 Mannschaften insgesamt $9\cdot 11=99$ Spieler:innen zu Verfügung.

Da zwei drittel der Spieler:innen männlich sind, gibt es $\frac{2}{3}\cdot 99=66$ Spieler und $99-66=33$ Spielerinnen.

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit beträgt:

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um Ziehen ohne Reihenfolge (wer wann gelost wird ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (ein Kind kann nur einmal ausgelost werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

$$P(X)=\frac{\text{Anzahl Treffer}\ \cdot\ \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

5 der 66 männlichen Kinder werden gewählt:

$\Rightarrow |\text{ Treffer}|=\binom{66}{5}$

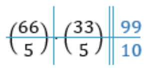
5 der 33 weiblichen Kinder werden gewählt:

$\Rightarrow |\text{ Niete}|=\binom{33}{5}$

10 Kinder werden aus 99 ausgewählt:

$\Rightarrow |\Omega|=\binom{99}{10}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



$$\frac{\binom{66}{5}\cdot\binom{33}{5}}{\binom{99}{10}}\approx 13,6\%$$

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Neben dem Fußballturnier werden für die Schülerinnen und Schüler auch ein Elfmeterschießen und ein Torwandschießen angeboten.

Dafür konnten sich die Kinder in zwei Listen eintragen. 45% der Kinder haben sich sowohl für das Torwandschießen als auch für das Elfmeterschießen eingetragen, 15% haben sich nur für das Elfmeterschießen eingetragen. 90% der Kinder, die sich für das Torwandschießen eingetragen haben, haben sich auch für das Elfmeterschießen eingetragen. Aus den Kindern wird eines zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

T : „Das Kind hat sich für das Torwandschießen eingetragen.“
E : „Das Kind hat sich für das Elfmeterschießen eingetragen.“

Untersuchen Sie die Ereignisse T und E auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Baumdiagramm erstellen

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ 45% der Kinder haben sich sowohl für das Torwandschießen als auch für das Elfmeterschießen eingetragen“

$\Rightarrow \quad P(T \cap E) = 45\% = 0,45$

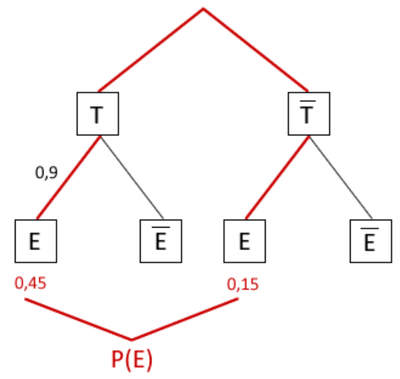
“ 15% haben sich nur für das Elfmeterschießen eingetragen“

$\Rightarrow \quad P(\overline{T} \cap E) = 15\% = 0,15$

“ 90% der Kinder, die sich für das Torwandschießen eingetragen haben, haben sich auch für das Elfmeterschießen eingetragen“

$\Rightarrow \quad P_T(E) = 90\% = 0,9$

Baumdiagramm zeichnen:



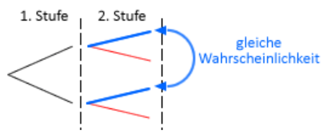
$P(E) = P(T \cap E) + P(\overline{T} \cap E) = 0,45 + 0,15 = 0,6$

Stochastische Unabhängigkeit

$P_T(E) = 0,9 \neq 0,6 = P(E)$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis immer dieselbe, unabhängig von einer Bedingung. Somit sind im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der Äste der zweiten Stufe, die in die gleiche Richtung (oben bzw. unten) zeigen, gleich.



Sind T und E stochastisch unabhängig, dann gilt:

$P_T(E) = P_{\overline{T}}(E) = P(E)$

$\Rightarrow \quad T$ und E sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Drücken Sie jedes der beiden folgenden Ereignisse unter Verwendung der Mengenschreibweise durch T und E aus.

A : „Das Kind hat sich in keine der Listen eingetragen.“
B : „Das Kind hat sich in genau eine Liste eingetragen.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Ereignis in Mengenschreibweise

$A = \overline{T} \cap \overline{E}$

Erläuterung: *Schnitt zweier Ereignisse*

In keine der Listen = nicht T **UND** nicht E treten ein, also die Schnittmenge von $\overline{T}$ und $\overline{E}$: $\quad \overline{T} \cap \overline{E}$

$B = (T \cap \overline{E}) \cup (\overline{T} \cap E)$

Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse, Schnitt zweier Ereignisse*

Genau in einer Liste = Entweder nur T **ODER** nur E, also die Vereinigung der Ereignisse nur T und nur E:

„nur T“ $\cup$ „nur E“

„nur T“ = T UND nicht E treten ein, also die Schnittmenge von T und $\overline{E}$
$\Rightarrow \quad T \cap \overline{E}$

„nur E“ = E UND nicht T treten ein, also die Schnittmenge von E und $\overline{T}$
$\Rightarrow \quad \overline{T} \cap E$

Zusammengefügt: $\quad (T \cap \overline{E}) \cup (\overline{T} \cap E)$

Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Beim Torwandschießen treten zwei Schützen gegeneinander an. Zunächst gibt der eine sechs Schüsse ab, anschließend der andere. Wer dabei mehr Treffer erzielt, hat gewonnen; andernfalls geht das Torwandschießen unentschieden aus.

Joe trifft beim Torwandschießen bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 20%, Hans mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Joe beim Torwandschießen gegen Hans gewinnt, wenn Hans bei seinen sechs Schüssen genau zwei Treffer erzielt hat. Erläutern Sie anhand einer konkreten Spielsituation, dass das dieser Aufgabe zugrunde gelegte mathematische Modell im Allgemeinen nicht der Realität entspricht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Binomialverteilung

E: „Joe gewinnt, wenn Hans genau zwei Treffer erzielt“

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen (Treffer, Niete) nennt man Bernoulli-Experiment.

p	Wahrscheinlichkeit für einen Treffer	hier : $p = 0,2$
$q = 1 - p$	Wahrscheinlichkeit für eine Niete	hier : $q = 0,8$

Bei mehrmaligem Ziehen in einem Bernoulli-Experiment spricht man von einer Bernoulli-Kette.

n	Anzahl der Züge („Länge“ der Bernoulli-Kette)	hier : $n = 6$

Bernoulli-Kette der Länge $n = 6$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(\text{„Joe trifft“}) = 20\% = 0,2$.

Erläuterung: *Ereignis*

Wenn Hans genau zwei Treffer erzielt, dann muss Joe mindestens 3 Treffer erzielen, damit er gewinnt.

$P(E) = P_{0,2}^{6}(X \geq 3)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(„\text{mindestens k Treffer}“) = 1 - P(„\text{höchsten k-1 Treffer}“)$

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$P(E) = 1 - P_{0,2}^{6}(X \leq 2) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,9011 = 0,0989 \approx 9,9\%$

Es wird modellhaft von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit ausgegangen. Trifft Joe jedoch bei keinem der ersten drei Schüssse, so hat er möglicherweise aufgrund zunehmender Nervosität bei den nächsten Schüssen eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\sum_{k=0}^{6} (B(6;0,2;k) \cdot B(6;0,3;k))$ angegeben wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Binomialverteilung

Das Torwandschießen zwischen Joe und Hans geht unentschieden aus.

Erläuterung:

$$\sum_{k=0}^{6} (B(6;0,2;k) \cdot B(6;0,3;k)) = \sum_{k=0}^{6} \left(\underbrace{P_{0,2}^{6}(X=k)}_{\text{Joe trifft k Mal}} \cdot \underbrace{P_{0,3}^{6}(X=k)}_{\text{Hans trifft k Mal}} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{6} (B(6;0,2;k) \cdot B(6;0,3;k)) = \begin{array}{cc} P_{0,2}^{6}(X=0) \cdot P_{0,3}^{6}(X=0) & \text{beide Treffen 0 Mal} \\ + & \text{oder} \\ P_{0,2}^{6}(X=1) \cdot P_{0,3}^{6}(X=1) & \text{beide Treffen 1 Mal} \\ + & \text{oder} \\ \vdots & \vdots \\ + & \text{oder} \\ P_{0,2}^{6}(X=6) \cdot P_{0,3}^{6}(X=6) & \text{beide Treffen immer} \end{array}$$

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Lisa erreichte im Training in 90% aller Fälle bei sechs Schüssen mindestens einen Treffer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr erster Schuss im Wettbewerb ein Treffer ist, wenn man davon ausgeht, dass sich ihre Trefferquote im Vergleich zum Training nicht ändert. Legen Sie Ihrer Berechnung als Modell eine geeignete Bernoullikette zugrunde.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Binomialverteilung

Y: Anzahl der Treffer, die Lisa bei 6 Schüssen erzielt

Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Lisa bei einem Schuss trifft.

$P_{p}^{6}(Y \geq 1) = 90\%$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_p^6(Y = 0) = 0,9$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(X = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - (1-p)^6 = 0,9 \qquad | +(1-p)^6 - 0,9$

$0,1 = (1-p)^6 \qquad | \sqrt[6]{}$

$\sqrt[6]{0,1} = 1 - p$

$p = 1 - \sqrt[6]{0,1}$