Abitur 2020 Mathematik Stochastik III

Gegeben sind grüne und rote Würfel, deren Seitenflächen unterschiedlich beschriftet sind und beim Werfen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Jeder grüne Würfel trägt auf fünf Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer die Augenzahl 6. Jeder rote Würfel trägt auf jeweils zwei Seitenflächen die Augenzahlen 1, 3 bzw. 6.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

In einer Urne befinden sich drei grüne Würfel und zwei rote Würfel. Der Urne werden mit einem Griff zwei Würfel zufällig entnommen. Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen kann, dass ein roter Würfel und ein grüner Würfel entnommen werden.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Ein grüner Würfel und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen. Geben Sie alle Werte an, die die Zufallsgröße X annehmen kann, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 7)$.

Teilaufgabe Teil B 1 (5 BE)

In einer Gemeinde gibt es 6250 Haushalte, von denen 2250 über einen schnellen Internetanschluss verfügen. Zwei Drittel der Haushalte, die über einen schnellen Internetanschluss verfügen, besitzen auch ein Abonnement eines Streamingdiensts. 46% aller Haushalte verfügen weder über einen schnellen Internetanschluss noch besitzen sie ein Abonnement eines Streamingdiensts.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A : „Ein zufällig ausgewählter Haushalt verfügt über einen schnellen Internetanschluss.“
B : „Ein zufällig ausgewählter Haushalt besitzt ein Abonnement eines Streamingdiensts.“

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf und überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

Ein Telekommunikationsunternehmen möchte neue Kunden gewinnen. Dazu schickt es an zufällig ausgewählte Haushalte Werbematerial. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die angeschriebenen Haushalte unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 20% noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 angeschriebenen Haushalten

- mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
- genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0,2^{10} + (1 - 0,2)^{10}$ angegeben wird.

Teilaufgabe Teil B 2c (5 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Haushalte das Unternehmen mindestens anschreiben müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens ein angeschriebener Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, einen solchen einrichten lassen würde. Gehen Sie dabei davon aus, dass sich jeder hundertste angeschriebene Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, dafür entscheidet, einen solchen einrichten zu lassen.

Die Zufallsgröße Y kann die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y mit $a, b \in [0; 1]$.

k	0	1	2	3	4
$P(Y=k)$	a	b	$\frac{3}{8}$	b	a

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Beschreiben Sie, woran man unmittelbar erkennen kann, dass der Erwartungswert von Y gleich 2 ist.

Die Varianz von Y ist gleich $\dfrac{11}{8}$.

Teilaufgabe Teil B 3b (5 BE)

Bestimmen Sie die Werte von a und b.

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Die Zufallsgröße Z, die für eine Laplace-Münze die Anzahl des Auftretens von „Zahl“ bei viermaligem Werfen beschreibt, hat ebenfalls den Erwartungswert 2 und es gilt analog $P(Z=2)=\frac{3}{8}$. Berechnen Sie die Varianz von Z, vergleichen Sie diese mit der Varianz von Y und beschreiben Sie davon ausgehend einen qualitativen Unterschied der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Z und Y.

Lösung

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Gegeben sind grüne und rote Würfel, deren Seitenflächen unterschiedlich beschriftet sind und beim Werfen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Jeder grüne Würfel trägt auf fünf Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer die Augenzahl 6. Jeder rote Würfel trägt auf jeweils zwei Seitenflächen die Augenzahlen 1, 3 bzw. 6.

In einer Urne befinden sich drei grüne Würfel und zwei rote Würfel. Der Urne werden mit einem Griff zwei Würfel zufällig entnommen. Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen kann, dass ein roter Würfel und ein grüner Würfel entnommen werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A a

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

5 Würfel: 3 x grün, 2x rot

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um Ziehen ohne Reihenfolge (welcher Würfel wann gezogen wird ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (beim gleichzeitigen Ziehen kann ein gezogener Würfel nicht erneut gezogen werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \cdot \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

1 von 3 grünen Würfeln wird gewählt:

$\Rightarrow |\text{ Treffer}| = \binom{3}{1}$

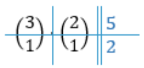
1 von 2 roten Würfeln wird gewählt:

$\Rightarrow |\text{ Niete}| = \binom{2}{1}$

2 von insgesamt 5 Würfeln werden gewählt:

$\Rightarrow |\Omega| = \binom{5}{2}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



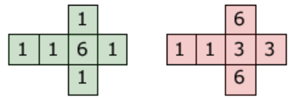
$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}$$

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Ein grüner Würfel und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen. Geben Sie alle Werte an, die die Zufallsgröße X annehmen kann, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 7)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A b

Wertebereich bestimmen



$X \in \{2; 4; 7; 9; 12\}$

Wahrscheinlichkeit

$$P(X = 7) = \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{1 grün}} \cdot \underbrace{\frac{2}{6}}_{\text{6 rot}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{6 grün}} \cdot \underbrace{\frac{2}{6}}_{\text{1 rot}} = \frac{1}{3}$$

Teilaufgabe Teil B 1 (5 BE)

In einer Gemeinde gibt es 6250 Haushalte, von denen 2250 über einen schnellen Internetanschluss verfügen. Zwei Drittel der Haushalte, die über einen schnellen Internetanschluss verfügen, besitzen auch ein Abonnement eines Streamingdiensts. 46% aller Haushalte verfügen weder über einen schnellen Internetanschluss noch besitzen sie ein Abonnement eines Streamingdiensts.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A : „Ein zufällig ausgewählter Haushalt verfügt über einen schnellen Internetanschluss.“
B : „Ein zufällig ausgewählter Haushalt besitzt ein Abonnement eines Streamingdiensts.“

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf und überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Aus dem Text der Aufgabenstellung:

$|\Omega| = 6250$

$|A| = 2250$

$|A \cap B| = \frac{2}{3} \cdot 2250 = 1500$

$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right| = 46\% \cdot 6250 = 2875$

	B	$\overline{B}$	
A	1500		2250
$\overline{A}$		2875	
			6250

Vierfeldertafel vervollständigen:

	B	$\overline{B}$	
A	1500	750	2250
$\overline{A}$	1125	2875	4000
	2625	3625	6250

Stochastische Unabhängigkeit

$$P(A)\cdot P(B) = \frac{2250}{6250}\cdot\frac{2625}{6250} = 0,1512 \neq 0,24 = \frac{1500}{6250} = P(A\cap B)$$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Ein Telekommunikationsunternehmen möchte neue Kunden gewinnen. Dazu schickt es an zufällig ausgewählte Haushalte Werbematerial. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die angeschriebenen Haushalte unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 20% noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 angeschriebenen Haushalten

- mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
- genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Binomialverteilung

$p = 20\% = 0,2$

E_1: „mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen“

E_2: „genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen“

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(„mindestens k Treffer“) $= 1 - P$(„höchsten k-1 Treffer“)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$$P(E_1) = P_{0,2}^{10}(X\geq 2) = 1 - P_{0,2}^{10}(X\leq 1) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,37581 = 62,42\%$$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P(E_2) = P_{0,2}^{10}(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 \approx 30,2\%$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0,2^{10} + (1-0,2)^{10}$ angegeben wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Ereignis beschreiben

Unter den 10 angeschriebenen Haushalten verfügen entweder alle oder keiner bereits über einen schnellen Internetanschluss.

Teilaufgabe Teil B 2c (5 BE)

Ermitteln Sie, wie viele Haushalte das Unternehmen mindestens anschreiben müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens ein angeschriebener Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, einen solchen einrichten lassen würde. Gehen Sie dabei davon aus, dass sich jeder hundertste angeschriebene Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, dafür entscheidet, einen solchen einrichten zu lassen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Binomialverteilung

Text analysieren:

„Ermitteln Sie, wie viele Haushalte ..“ $\Rightarrow$ n ist gesucht

“ ...mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% ...“ $\Rightarrow$ $P > 0,99$

“ ... wenigstens ein angeschriebener Haushalt ...“ $\Rightarrow$ $X \geq 1$

“ Gehen Sie dabei davon aus, dass sich jeder hundertste angeschriebene Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, dafür entscheidet, einen solchen einrichten zu lassen. “

$\Rightarrow$ $p(\text{„lässt Internet einrichten“}) = \frac{1}{100} \cdot 0,2 = 0,002$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,002$ angesehen werden.

$P_{0,002}^n(X \geq 1) > 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_{0,002}^n(X = 0) > 0,99 \quad | -1$

$-P_{0,002}^n(X = 0) > -0,01 \quad | \cdot(-1)$

$P_{0,002}^n(X = 0) < 0,01$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1-p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k=0$:

$$P(0 \text{ Treffer}) = P_p^n(Z=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(0 \text{ Treffer}) = (1-p)^n$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^n < 0{,}01$$

$$0{,}998^n < 0{,}01$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$0{,}998^n < 0{,}01 \quad | \quad \ln()$$

$$\ln\left(0{,}998^n\right) < \ln(0{,}01)$$

$$n \cdot \ln(0{,}998) < \ln(0{,}01) \quad | \quad : \ln(0{,}998)$$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}998)}$$

$$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}998)} \approx 2300{,}28$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 2301 \text{ (Haushalte)}$$

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Die Zufallsgröße Y kann die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y mit $a, b \in [0;1]$.

k	0	1	2	3	4
P(Y = k)	a	b	$\frac{3}{8}$	b	a

Beschreiben Sie, woran man unmittelbar erkennen kann, dass der Erwartungswert von Y gleich 2 ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch zum Wert $k=2$.

Erläuterung:

Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X symmetrisch zu einem Wert k, so gilt für den Erwartungswert der Zufallsgröße: $E(X) = k$.

Teilaufgabe Teil B 3b (5 BE)

Die Varianz von Y ist gleich $\frac{11}{8}$.

Bestimmen Sie die Werte von a und b.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Varianz einer Zufallsgröße

Erwartungswert $E(Y) = 2$ (s. Teilaufgabe Teil B 3a)

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Die Varianz einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 4) ist definiert als:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

$\text{Var}(Y) = (0-2)^2 \cdot a + (1-2)^2 \cdot b + (2-2)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3-2)^2 \cdot b + (4-2)^2 \cdot a$

$\text{Var}(Y) = 4a + b + b + 4a$

$\text{Var}(Y) = 8a + 2b$

Mit $\text{Var}(Y) = \frac{11}{8}$ ergibt sich die 1. Gleichung:

(I) $8a + 2b = \frac{11}{8}$

Erläuterung:

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Werte einer Zufallsgröße X ist gleich 1.

Weiterhin gilt $a + b + \frac{3}{8} + b + a = 1$; somit ergibt sich die 2. Gleichung:

(II) $2a + 2b = \frac{5}{8}$

Lineares Gleichungssystem lösen:

(I) $8a + 2b = \frac{11}{8}$
(II) $2a + 2b = \frac{5}{8}$

(I) - (II): $6a = \frac{6}{8} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8}$

$a = \frac{1}{8}$ in Gleichung II einsetzen und nach b auflösen:

$2 \cdot \frac{1}{8} + 2b = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{16}$

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Die Zufallsgröße Z, die für eine Laplace-Münze die Anzahl des Auftretens von „Zahl“ bei viermaligem Werfen beschreibt, hat ebenfalls den Erwartungswert 2 und es gilt analog $P(Z=2) = \frac{3}{8}$. Berechnen Sie die Varianz von Z, vergleichen Sie diese mit der Varianz von Y und beschreiben Sie davon ausgehend einen qualitativen Unterschied der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Z und Y.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Varianz einer Zufallsgröße

Das viermalige Werfen einer Laplace-Münze stellt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p(\text{„Zahl“}) = \frac{1}{2}$ dar.

Erläuterung: *Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt für die Varianz von X:

$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$n =$ Länge der Bernoulli-Kette
$p =$ Trefferwahrscheinlichkeit

$\text{Var}(Z) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 < \frac{11}{8} = \text{Var}(Y)$

D.h. die Zufallsgröße Z hat im Vergleich zur Zufallsgröße Y eine geringere Streuung um den gleichen Erwartungswert $E(X) = E(Y) = 2$.