

Abitur 2019 Mathematik Stochastik III

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Die Zufallsgröße X kann ausschließlich die Werte 1, 4, 9 und 16 annehmen. Bekannt sind $P(X = 9) = 0,2$ und $P(X = 16) = 0,1$ sowie der Erwartungswert $E(X) = 5$. Bestimmen Sie mithilfe eines Ansatzes für den Erwartungswert die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ und $P(X = 4)$.

Teilaufgabe Teil A 3 (2 BE)

Gegeben ist eine Bernoullikette mit der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p . Erklären Sie, dass für alle $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ die Beziehung $B(n; p; k) = B(n; 1 - p; n - k)$ gilt.

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff, das Platz für 60 Fahrgäste bietet.

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

Betrachtet wird eine Fahrt, bei der das Schiff voll besetzt ist. Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene, Jugendliche und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Jugendlichen und Kindern 75%. Berechnen Sie, wie viele Erwachsene an der Fahrt teilnehmen.

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen, ohne dabei schon den Fahrpreis bezahlen zu müssen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 zur Verfügung stehenden Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen. Vereinfachend soll angenommen werden, dass X binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10% beträgt. Die abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene Tafelwerk.

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$

n	k	p = 0,10	p = 0,11	p = 0,12	p = 0,13	p = 0,14	p = 0,15	p = 0,16	p = 0,17
64	0	0,00118	0,00058	0,00028	0,00013	0,00006	0,00003	0,00001	0,00001
	1	0,00956	0,00514	0,00272	0,00142	0,00073	0,00037	0,00019	0,00009
	2	0,03891	0,02290	0,01321	0,00748	0,00417	0,00228	0,00123	0,00065
	3	0,10629	0,06827	0,04277	0,02620	0,01572	0,00924	0,00533	0,00302
	4	0,22047	0,15377	0,10425	0,06886	0,04439	0,02797	0,01725	0,01043
	5	0,37271	0,28059	0,20485	0,14534	0,10040	0,06763	0,04450	0,02863
...	

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei der Annahme, die Zufallsgröße X ist binomialverteilt, im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, höchstens ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10%.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der für eine Fahrt möglichen Reservierungen nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Teilaufgabe Teil B 2f (2 BE)

Beschreiben Sie den zugehörigen Fehler zweiter Art sowie die daraus resultierende Konsequenz im Sachzusammenhang.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Zahl 2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Zahl 0}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Zahl 1}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Zahl 9}} = \frac{2}{625}$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}}_{2 \text{ und } 9} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{9 \text{ und } 2} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}_{9 \text{ und } 9} = \frac{8}{25}$$

Teilaufgabe Teil A 2 (3 BE)

Die Zufallsgröße X kann ausschließlich die Werte 1, 4, 9 und 16 annehmen.

Bekannt sind $P(X = 9) = 0,2$ und $P(X = 16) = 0,1$ sowie der Erwartungswert $E(X) = 5$.

Bestimmen Sie mithilfe eines Ansatzes für den Erwartungswert die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ und $P(X = 4)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2**Erwartungswert einer Zufallsgröße**

Mit $P(X = 1) = a$ und $P(X = 4) = b$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	1	4	9	16
$P(X = x_i)$	a	b	0,2	0,1

Es gilt: $P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 9) + P(X = 16) = 1$

$$a + b + 0,2 + 0,1 = 1$$

$$a + b = 0,7 \quad (\text{Gleichung I})$$

Weiterhin gilt: $E(X) = 5$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte x_1, x_2, \dots, x_n jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

$$5 = 1 \cdot P(X = 1) + 4 \cdot P(X = 4) + 9 \cdot P(X = 9) + 16 \cdot P(X = 16)$$

$$5 = 1 \cdot a + 4 \cdot b + 9 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1$$

$$5 = a + 4b + 3,4$$

$$a + 4b = 1,6 \quad (\text{Gleichung II})$$

Lineares Gleichungssystem aus I und II lösen:

$$\text{I.} \quad a + b = 0,7$$

$$\text{II.} \quad a + 4b = 1,6$$

$$\text{II.} - \text{I.:} \quad a + 4b - a - b = 1,6 - 0,7 \quad \iff \quad 3b = 0,9 \quad \Rightarrow \quad b = 0,3$$

$$b = 0,3 \text{ in I. einsetzen:} \quad a + 0,3 = 0,7 \quad \Rightarrow \quad a = 0,4$$

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 1) = 0,4$, $P(X = 4) = 0,3$

Teilaufgabe Teil A 3 (2 BE)

Gegeben ist eine Bernoullikette mit der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p . Erklären Sie, dass für alle $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ die Beziehung $B(n; p; k) = B(n; 1 - p; n - k)$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3**Binomialverteilung**

Es gilt: $P_p^n(X = k) = P_{1-p}^n(X = n - k)$ für alle $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Bei einem Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, gleich $1 - p$. Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau k Treffer zu erzielen, gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, genau $(n - k)$ -mal keinen Treffer zu erzielen.

Teilaufgabe Teil B 1 (3 BE)

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff, das Platz für 60 Fahrgäste bietet.

Betrachtet wird eine Fahrt, bei der das Schiff voll besetzt ist. Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene, Jugendliche und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Jugendlichen und Kindern 75%. Berechnen Sie, wie viele Erwachsene an der Fahrt teilnehmen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1

Wahrscheinlichkeit

$60 : 2 = 30$ Fahrgäste essen Eis.

$x =$ Anzahl Erwachsene

$60 - x =$ Anzahl Jugendliche und Kinder

Jeder Dritte Erwachsene isst Eis $\iff \frac{1}{3}x$

75% der Jugendlichen und Kindern essen Eis $\iff \frac{75}{100} \cdot (60 - x) = \frac{3}{4} \cdot (60 - x)$

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} \cdot (60 - x) = 30$$

$$\frac{1}{3}x + 45 - \frac{3}{4}x = 30$$

$$15 = \frac{5}{12}x \quad \Rightarrow \quad x = 36$$

36 Erwachsene nehmen an der Fahrt teil.

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen, ohne dabei schon den Fahrpreis bezahlen zu müssen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 zur Verfügung stehenden Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so

können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen. Vereinfachend soll angenommen werden, dass X binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10% beträgt. Die abgebildete Tabelle ergänzt das zugelassene Tafelwerk.

Binomialverteilung kumulativ; $k \mapsto \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$

n	k	p = 0,10	p = 0,11	p = 0,12	p = 0,13	p = 0,14	p = 0,15	p = 0,16	p = 0,17
64	0	0,00118	0,00058	0,00028	0,00013	0,00006	0,00003	0,00001	0,00001
	1	0,00956	0,00514	0,00272	0,00142	0,00073	0,00037	0,00019	0,00009
	2	0,03891	0,02290	0,01321	0,00748	0,00417	0,00228	0,00123	0,00065
	3	0,10629	0,06827	0,04277	0,02620	0,01572	0,00924	0,00533	0,00302
	4	0,22047	0,15377	0,10425	0,06886	0,04439	0,02797	0,01725	0,01043
	5	0,37271	0,28059	0,20485	0,14534	0,10040	0,06763	0,04450	0,02863
...	

Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei der Annahme, die Zufallsgröße X ist binomialverteilt, im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Binomialverteilung

z. B.: Man kann nicht in jedem Fall davon ausgehen, dass das Nichterscheinen zweier Personen mit Reservierung stets unabhängig voneinander erfolgt, beispielsweise wenn die beiden Personen miteinander befreundet sind.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Binomialverteilung

E : „Keine Person mit Reservierung wird abgewiesen“

E ist gleichbedeutend mit: „Mindestens 4 Personen mit Reservierung erscheinen nicht“

$$P(E) = P_{0,1}^{64}(X \geq 4)$$

$$P(E) = 1 - P_{0,1}^{64}(X < 4)$$

$$P(E) = 1 - P_{0,1}^{64}(X \leq 3) \stackrel{\text{Ergänzung zum TW}}{=} 1 - 0,10629 = 0,89371 \approx 89,4\%$$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, höchstens ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen

Wert auf ganze Prozent genau.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Binomialverteilung

Die Zufallsgröße Y soll die Anzahl der Personen mit Reservierung beschreiben, die abgewiesen werden.

$$P(Y \geq 1) \leq 0,01$$

$$1 - P(Y = 0) \leq 0,01 \quad | -1$$

$$-P(Y = 0) \leq -0,99 \quad | \cdot(-1)$$

$$P(Y = 0) \geq 0,99$$

$P(Y = 0)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass keine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

$$P(Y = 0) \iff P(X \geq 4) \quad (\text{s. Teilaufgabe Teil B 2b})$$

$$P_p^{64}(X \geq 4) \geq 0,99$$

$$1 - P_p^{64}(X \leq 3) \geq 0,99 \quad | -1$$

$$-P_p^{64}(X \leq 3) \geq -0,01 \quad | \cdot(-1)$$

$$P_p^{64}(X \leq 3) \leq 0,01$$

Wert für p der Tabelle der Angabe entnehmen: $p = 0,15 = 15\%$

Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10%.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der für eine Fahrt möglichen Reservierungen nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,1$

Stichprobenumfang: $n = 200$

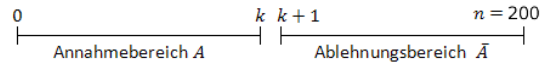
Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmereich von H_0 : $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = [k + 1, 200]$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Da hier die Nullhypothese " $p \leq 0,1$ " bzw. "**höchstens** 10%" lautet, liegt der Annahmereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1. Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($X \geq k + 1$).

\Rightarrow Fehler erster Art: $P_{0,1}^{200}(X \geq k + 1) \leq 0,05$

$$P_{0,1}^{200}(X \geq k + 1) \leq 0,05$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$P(\text{mindestens } k+1 \text{ Treffer}) = 1 - P(\text{höchstens } k \text{ Treffer})$

In mathematischen Zeichen:

$$P(X \geq k + 1) = 1 - P(X \leq k)$$

$$1 - P_{0,1}^{200}(X \leq k) \leq 0,05 \quad | \quad -1$$

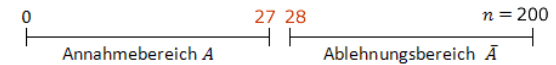
$$-P_{0,1}^{200}(X \leq k) \leq -0,95 \quad | \quad \cdot(-1)$$

(da die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$$P_{0,1}^{200}(X \leq k) \geq 0,95$$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k = 27$

Entscheidungsregel:



Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e](#)

Anwendungszusammenhang

Das Risiko, die Anzahl der Reservierungen irrtümlich zu erhöhen, beträgt höchstens 5% und ist somit gering. Damit stand bei der Wahl der Nullhypothese das Interesse im Vordergrund, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen.

Teilaufgabe Teil B 2f (2 BE)

Beschreiben Sie den zugehörigen Fehler zweiter Art sowie die daraus resultierende Konsequenz im Sachzusammenhang.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2f](#)

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

Aufgrund des Testergebnisses lehnt das Unternehmen die Null-hypothese irrtümlicherweise nicht ab.

Konsequenz z. B.: Das Unternehmen bleibt bei der bisherigen Anzahl möglicher Reservierungen und erleidet durch mehr frei-bleibende Plätze finanzielle Einbußen.