Fachabitur 2019 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f', die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an.

Teilaufgabe 2. (6 BE)

Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$

b) $e^{x^2} = e^{2x-1}$

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

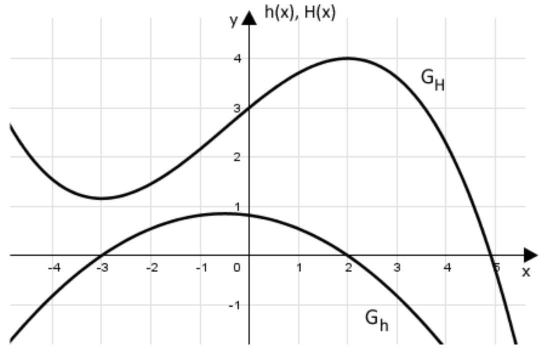
Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int_{-2}^{2} g(x)\ \mathrm{d}x$ an.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$.

Teilaufgabe 4. (3 BE)

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt.
Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch.



Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I.	$f(0) = 0$	II.	$f'(0) = 0$
III.	$f(-3) = -3$	IV.	$f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem karteischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 5.1 (2 BE)

Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat.

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$]

Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x)$ und der im Vergleich zu D_f eingeschränkten Definitionsmenge $D_g = [-4,5;1]$ betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 5.3.1 (8 BE)

Ermitteln Sie die Wertemenge W_g der Funktion g. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte.

Teilaufgabe 5.3.2 (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion g.

Teilaufgabe 5.3.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_g in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion g. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 5.3.4 (3 BE)

Der Graph der Funktion g und die x-Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden.
Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $N(t)$ gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 6.1 (7 BE)

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t_{\max}$ die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt und berechnen Sie diese maximale Anzahl.

[Teilergebnis: $\dot{N}(t) = \left(4t - t^2\right) \cdot e^{-0,5t}$]

Teilaufgabe 6.2 (2 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $N(t)$ für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 6.3 (3 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 6.4 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $G : t \mapsto \left(-4t^2 - 16t - 32\right) \cdot e^{-0,5t}$ mit der Definitionsmenge $D_G = \mathbb{R}_0^+$.
Zeigen Sie, dass die Funktion G eine mögliche Stammfunktion von N ist.
Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle.

Lösung

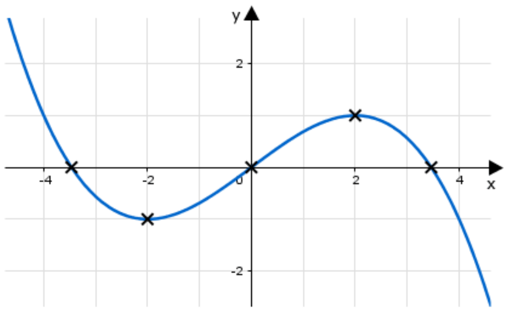
Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$.

Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Skizze



Grenzwert bestimmen

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f', die Lage des Extrem-

punktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Graph der Ableitungsfunktion

Nach unten geöffnete Parabel, achsensysmmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen bei $x = \pm 2$.

Extremum / Scheitel bei $x = 0$

Teilaufgabe 2. (6 BE)

Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$

b) $e^{x^2} = e^{2x-1}$

Lösung zu Teilaufgabe 2.

Quadratische Gleichung

$3x^4 - 12x^2 = 0 \qquad | \; x^2$ ausklammern

$x^2 \cdot \left(3x^2 - 12\right) = 0$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4$

$\Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm 2$

Exponentialgleichung

$e^{x^2} = e^{2x-1} \qquad | \; \ln$

$x^2 = 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad |$ 2. binomische Formel

$(x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

Alternativ: $\quad x_{1,2} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int\limits_{-2}^{2} g(x)\ \mathrm{dx}$ an.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Symmetrieverhalten einer Funktion

$g(x) = e^{0,25x} - e^{-0,25x}$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$g(-x) = e^{0,25\cdot(-x)} - e^{-0,25\cdot(-x)} = e^{-0,25x} - e^{0,25x} = -g(x)$

$\Rightarrow \quad G_g$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Bestimmtes Integral

$\int\limits_{-2}^{2} g(x)\ \mathrm{dx} = 0$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Tangentengleichung ermitteln

$g(x) = e^{0,25x} - e^{-0,25x}$

$g(0) = \underbrace{e^0}_{1} - e^0 = 1 - 1 = 0$

Erste Ableitung bilden:

$g'(x) = e^{0,25x} \cdot 0,25 - e^{-0,25x} \cdot (-0,25)$

$g'(x) = 0,25 \cdot e^{0,25x} + 0,25 \cdot e^{-0,25x}$

$g'(0) = 0,25 \cdot e^0 + 0,25 \cdot e^0 = 0,25 + 0,25 = 0,5$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet: $\quad y = m \cdot x + t$

m gibt die Steigung der Geraden an.
t entspricht dem y-Achsenabschnitt.

Tangentengleichung: $\quad y = m\,x + t$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente am Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

$y = 0,5x + t$

Erläuterung: *Einsetzen, Punktkoordinaten*

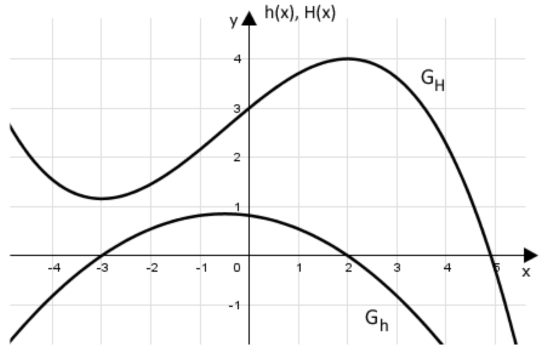
Die Tangente verläuft durch den Punkt (0|0).
Die Stichwort Punktkoordinaten müssen die Geradengleichung der Tangente erfüllen.

$0 = 0,5 \cdot 0 + t \qquad \Rightarrow \qquad t = 0$

$y = 0,5x$

Teilaufgabe 4. (3 BE)

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt.
Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch.



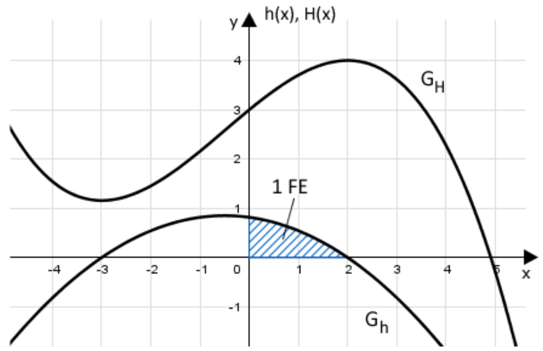
Lösung zu Teilaufgabe 4.

Flächenberechnung

$H(2) - H(0) = 4 - 3 = 1$

$$H(2) - H(0) = \int_0^2 h(x) \, \mathrm{dx} = 1$$

geometrische Interpretation: G_h schließt mit der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 2$ eine Fläche der Größe 1 FE ein.



Teilaufgabe 5.1 (2 BE)

Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I.	$f(0) = 0$	II.	$f'(0) = 0$
III.	$f(-3) = -3$	IV.	$f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem karteischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat.

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

Eigenschaften einer Funktion

I. Die Funktion verläuft durch den Ursprung

II. Steigung bei $x = 0$ ist Null

III. Die Funktion verläuft durch den Punkt $(-3|-3)$

IV. Steigung bei $x = -3$ ist gleich -1

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$]

Lösung zu Teilaufgabe 5.2

Funktionsgleichung ermitteln

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$

Punkte einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \\ f(-3) & = & -3 \\ f'(-3) & = & = -1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lrcr} \text{I.} & d & = & 0 \\ \text{II.} & c & = & 0 \\ \text{III.} & -3 & = & -27a + 9b \\ \text{IV.} & -1 & = & 27a - 6b \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem lösen:

$\text{III.} + \text{IV.}$: $\quad -4 = 3b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{4}{3}$

$b = -\frac{4}{3}$ in IV. einsetzen: $\quad -3 = -27a - 12 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$

Werte in f einsetzen: $\quad f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$

Teilaufgabe 5.3.1 (8 BE)

Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x)$ und der im Vergleich zu D_f eingeschränkten Definitionsmenge $D_g = [-4,5;1]$ betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Ermitteln Sie die Wertemenge W_g der Funktion g. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte.

Lösung zu Teilaufgabe 5.3.1

Art von Extrempunkten ermitteln

$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 \qquad D_g = [-4,5;1]$

Erste und zweite Ableitung bilden:

$g'(x) = -x^2 - \frac{8}{3}x \qquad D_{g'} =]-4,5;1[$

$g''(x) = -2x - \frac{8}{3}$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $g'(x) = 0$

$-x^2 - \frac{8}{3}x = 0$

$x = x \cdot \left(-x - \frac{8}{3}\right) = 0$

$x_1^E = 0 \quad ; \quad x_2^E = -\frac{8}{3}$

Lage der (möglichen) Extrempunkte ermitteln:

$y_1^E = g(0) = 0$

$y_2^E = g\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{256}{81} \approx -3,16$

Anzahl der Extrempunkte ermitteln

$g''(0) = -\frac{8}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad$ rel. Maximum $E_1\ (0|0)$

$g''\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ rel. Minimum $E_2\left(-\frac{8}{3}|-\frac{256}{81}\right)$

Rand:

$g(-4,5) = \frac{27}{8} = 3,375 \quad \Rightarrow \quad$ absolutes Maximum

$g(1) = -\frac{5}{3} \approx -1,67 \quad \Rightarrow \quad$ E_2 absolutes Minimum

Wertebereich bestimmen

$W = \left[-\frac{256}{81}; 3,375\right]$

Teilaufgabe 5.3.2 (3 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion g.

Lösung zu Teilaufgabe 5.3.2

Wendepunkt ermitteln

$g''(x) = -2x - \frac{8}{3}$

$g'''(x) = -2$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0, \quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $g''(x) = 0$

$-2x - \frac{8}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{WP} = -\frac{4}{3}$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\mathrm{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\mathrm{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$g'''\left(-\frac{4}{3}\right) = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^{WP} = -\frac{4}{3}$ ist Wendestelle

y-Koordinate des Wendepunkts ermitteln:

$y^{WP} = g\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{128}{81} \approx -1,58 \quad \Rightarrow \quad WP\left(-\frac{4}{3}|-\frac{128}{81}\right)$ Wendepunkt

Teilaufgabe 5.3.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_g in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion g. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Lösung zu Teilaufgabe 5.3.3

Nullstellen einer Funktion

$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$

$g(x) = 0$

$-\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) = 0$

$x_1^N = 0 \quad ; \quad -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^N = -4$

Skizze

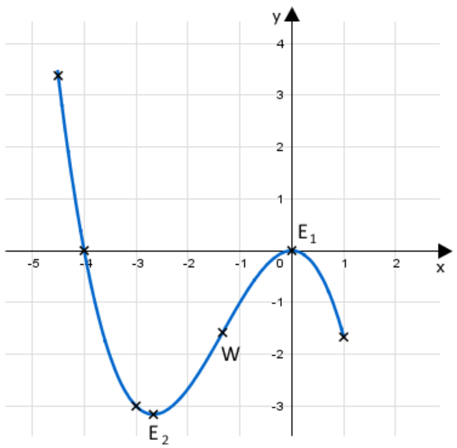
Hochpunkt: $E_1\ (0|0)$

Tiefpunkt: $E_2\ \left(-\frac{8}{3}| - \frac{256}{81}\right)$

Wendepunkt: $W\ P\ \left(-\frac{4}{3}| - \frac{128}{81}\right)$

$g(-4,5) = \frac{27}{8} = 3,375$

$g(1) = -\frac{5}{3} \approx -1,67$

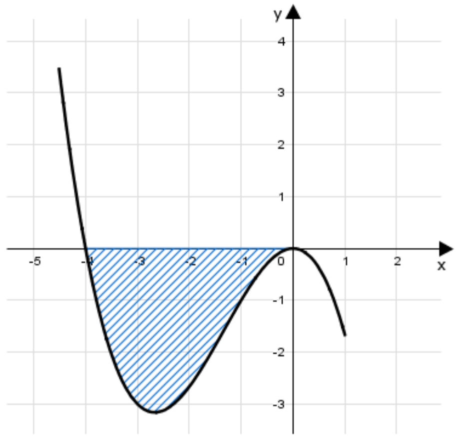


Teilaufgabe 5.3.4 (3 BE)

Der Graph der Funktion g und die x-Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

Lösung zu Teilaufgabe 5.3.4

Flächenberechnung



$$\int_{-4}^{0} g(x)\ \mathrm{dx} = \int_{-4}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2\right)\ \mathrm{dx}$$

$$\int_{-4}^{0} g(x)\ \mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{9}x^3\right]_{-4}^{0}$$

$$\int_{-4}^{0} g(x)\ \mathrm{dx} = 0 - \left(-\frac{1}{12}(-4)^4 - \frac{4}{9}(-4)^3\right) = -\frac{64}{9}$$

Flächeninhalt $A = \frac{64}{9}$ FE

Teilaufgabe 6.1 (7 BE)

Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden.
Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $N(t)$ gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an.
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t_{\max}$ die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt und berechnen Sie diese maximale Anzahl.

[Teilergebnis: $\dot{N}(t) = \left(4t - t^2\right) \cdot e^{-0,5t}$]

Lösung zu Teilaufgabe 6.1

Extremwertaufgabe

$N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t} \qquad D_N = [0;\infty[$

Erste Ableitung bilden:

$N'(t) = 4t \cdot e^{-0,5t} + 2t^2 \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5)$

$N'(t) = e^{-0,5t} \cdot \left(4t - t^2\right) \qquad D_{N'} =]0;\infty[$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $\quad N'(t) = 0$

$\underbrace{e^{-0,5t}}_{>0} \cdot \left(4t - t^2\right) = 0$

$4t - t^2 = 0$

$t \cdot (4 - t) = 0$

$\left(\underbrace{t_1^E = 0}_{\notin D_{N'}}\right) \qquad t_2^E = 4$

Zweite Ableitung bilden:

$N''(t) = e^{-0,5t} \cdot (4 - 2t) + e^{-0,5t} \cdot (-0,5) \cdot \left(4t - t^2\right)$

Wert der zweiten Ableitung an der Extremstelle:

$N''(4) \approx -0,54 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ rel. Maximum bei $t = 4$

N' hat in D keine weitere Nullstelle, somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebene Bereich auf; das relative Maximum ist das absolute bei $t_{\max} = 4$.

$N(4) \approx 4,33 \qquad$ ca. 4330 Neuerkrankungen

Teilaufgabe 6.2 (2 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $N(t)$ für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 6.2

Grenzwert bestimmen

$\lim\limits_{x\to\infty} N(t) = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{2t^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-0,5t}^{\to-\infty}}}_{\to 0^+} = 0^+ \qquad$ " e überwiegt"

Die Anzahl der Neuerkrankungen geht auf lange Sicht gegen Null.

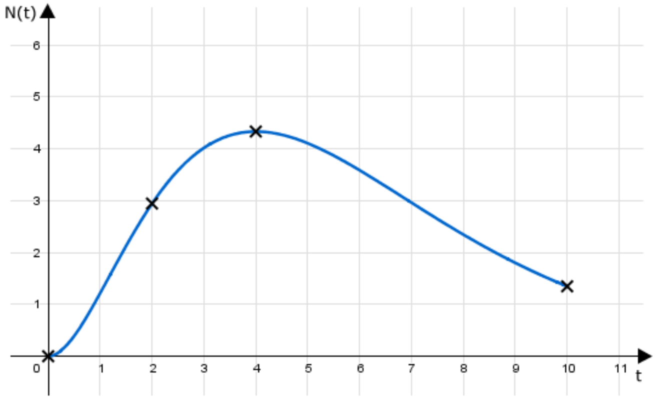
Teilaufgabe 6.3 (3 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Lösung zu Teilaufgabe 6.3

Skizze

$N(0) = 0$
$N(2) \approx 2,94$
$N(4) \approx 4,33 \qquad$ (Max.)
$N(10) \approx 1,35$



Teilaufgabe 6.4 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $G: t \mapsto \left(-4t^2 - 16t - 32\right) \cdot e^{-0,5t}$ mit der Definitionsmenge $D_G = \mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie, dass die Funktion G eine mögliche Stammfunktion von N ist. Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle.

Lösung zu Teilaufgabe 6.4

Nachweis einer Stammfunktion

$$G(t) = \left(-4t^2 - 16t - 32\right) \cdot e^{-0,5t}$$

$$G'(t) = (-8t - 16) \cdot e^{-0,5t} + \left(-4t^2 - 16t - 32\right) \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5)$$

$$G'(t) = e^{-0,5t} \cdot \left(-8t - 16 + 2t^2 + 4t + 16\right)$$

$$G'(t) = e^{-0,5t} \cdot \left(2t^2\right) = N(t)$$

Bestimmtes Integral

$$\int_0^8 N(t)\ \mathrm{dt} = \int_0^8 \left(2t^2 \cdot e^{-0,5t}\right)\ \mathrm{dt}$$

$$\int_0^8 N(t)\ \mathrm{dt} = \left[\left(-4t^2 - 16t - 32\right) \cdot e^{-0,5t}\right]_0^8$$

$$\int_0^8 N(t)\ \mathrm{dt} = \left(-4 \cdot 8^2 - 16 \cdot 8 - 32\right) \cdot e^{-0,5 \cdot 8} + 32 \approx 24,38$$

Durchschnitt: $\frac{24,38}{8} \approx 3,05$ ca. 3050 Neuerkrankungen