Abitur 2019 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x+1} - 2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Teilaufgabe Teil A 1a (1 BE)

Geben Sie D an.

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(8|g(8))$.

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

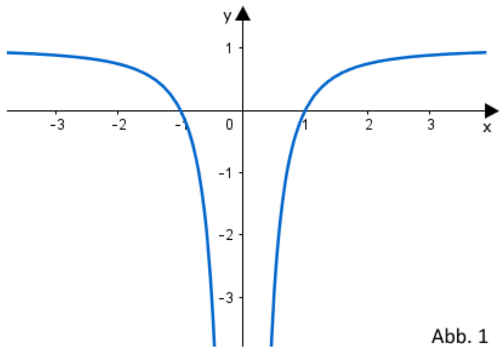


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k : x \mapsto k\,x^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2|-3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

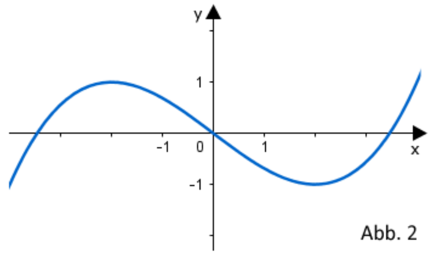


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

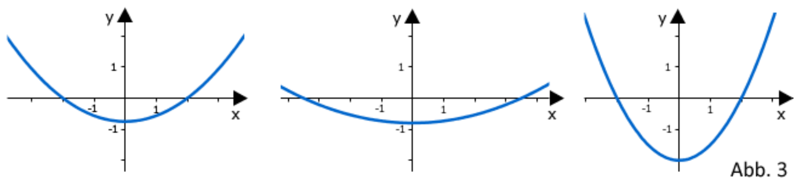
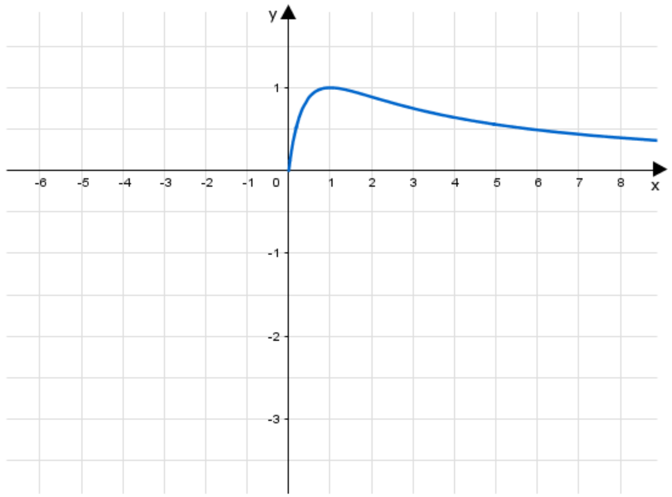


Abb. 3

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{4x}{(x+1)^2}$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen G_f von f im I. Quadranten.



Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Begründen Sie, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle von f ist. Geben Sie die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an und begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass G_f die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ als waagrechte Asymptote besitzt.

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Begründen Sie, dass G_f für $x < 0$ nur im III. Quadranten verläuft, und zeichnen Sie in die Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f ein. Berechnen Sie dazu $f(-3)$ und drei weitere geeignete Funktionswerte von f.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Gegeben ferner die in $]-1;+\infty[$ definierte Funktion $F: x \mapsto 4 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{4}{x+1}$.
Zeigen Sie, dass F für $x > -1$ eine Stammfunktion von f ist.

Ein Pharmaunternehmen führt eine Studie zur Wirksamkeit und Verträglichkeit eines neu entwickelten Medikaments durch. Wenn das Medikament einmalig in Form einer Tablette eingenommen wird, kann die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten modellhaft durch die betrachtete Funktion f für $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden seit der Einnahme der Tablette und $f(x)$ für die Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten (im Weiteren kurz als Wirkstoffkonzentration bezeichnet) in Milligramm pro Liter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right)$.
Die folgenden Aufgaben e bis i sollen auf der Grundlage dieses Modells bearbeitet werden.

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Berechnen Sie die Wirkstoffkonzentration 30 Minuten nach Einnahme der Tablette und geben Sie die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration an.

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

An der Stelle $x = 2$ hat G_f einen Wendepunkt. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um dies zu begründen. Geben Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang an.

In der Pharmakologie wird das in positive x-Richtung unbegrenzte Flächenstück, das sich im I. Quadranten zwischen G_f und der x-Achse befindet, als AUC („area under the curve“) bezeichnet. Nur dann, wenn diesem Flächenstück ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration auch für große Zeitwerte x realistisch beschreiben.

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Die x-Achse, G_f und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(b)$ ein. Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabe d angegebenen Stammfunktion F einen Term für $A(b)$ und beurteilen Sie unter Verwendung dieses Terms, ob die Funktion f auch für große Zeitwerte eine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration darstellt.

Das Medikament zeigt die gewünschte Wirkung erst ab einer bestimmten Wirkstoffkonzentration. Daher soll der Patient nach der ersten Tablette des Medikaments eine zweite identisch wirkende Tablette einnehmen, noch bevor die Konzentration des Wirkstoffs im Blut unter $0,75\frac{\text{mg}}{l}$ fällt. Nach der Einnahme der zweiten Tablette erhöht sich die Wirkstoffkonzentration um die durch diese Tablette verursachte Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

Teilaufgabe Teil B h (4 BE)

Ermitteln Sie durch Rechnung den spätesten Zeitpunkt, zu dem die zweite Tablette eingenommen werden soll.

Teilaufgabe Teil B i (3 BE)

Wird die zweite Tablette zweieinhalb Stunden nach der ersten Tablette eingenommen, so kann die Wirkstoffkonzentration für $x \in [2,5;9]$ mit einem der folgenden Terme beschrieben werden. Wählen Sie den passenden Term aus und begründen Sie Ihre Wahl.

(A) $f(x) + f(x + 2,5)$
(B) $f(x) + f(x - 2,5)$
(C) $f(x - 2,5) + f(2,5)$
(D) $f(x) - f(x - 2,5)$

Verabreicht man das Medikament nicht in Form von Tabletten, sondern mittels einer Dauerinfusion, so wird der Wirkstoff langsam und kontinuierlich zugeführt. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k : x \mapsto \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1,5$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration während einer Dauerinfusion. Dabei ist x die seit Anlegen der Dauerinfusion vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die Wirkstoffkonzentration in $\frac{\text{mg}}{l}$.

Teilaufgabe Teil B j (4 BE)

Begründen Sie, dass der Graph von k streng monoton steigend ist.

(zur Kontrolle: $k'(x) = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$)

Teilaufgabe Teil B k (5 BE)

Bei Dauerinfusionen dieses Medikaments muss die Wirkstoffkonzentration spätestens 60 Minuten nach Beginn der Infusion dauerhaft größer als $0,75\frac{\text{mg}}{l}$ sein und stets mindestens 25% unter der gesundheitsschädlichen Grenze von $2\frac{\text{mg}}{l}$ liegen. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$ und beurteilen Sie beispielsweise unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, ob gemäß der Modellierung diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (1 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x + 1} - 2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Geben Sie D an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = \sqrt{x + 1} - 2$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$g(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $x + 1$, muss größer oder gleich Null sein.

$x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$\Rightarrow \quad D = [-1; +\infty[$

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(8|g(8))$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Tangentengleichung ermitteln

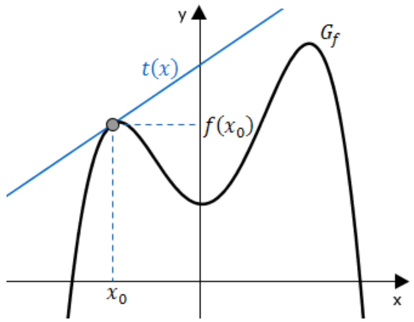
$g(x) = \sqrt{x + 1} - 2$

Tangentengleichung t im Punkt $(8|g(8))$:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = 8$.

$t: y = (x - x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0)$

$t: y = (x - 8) \cdot g'(8) + g(8)$

Nebenrechnungen:

$g(8) = \sqrt{9} - 2 = 1$

$g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$g'(8) = \frac{1}{2\sqrt{8+1}} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \quad t: y = \frac{1}{6}(x - 8) + 1 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

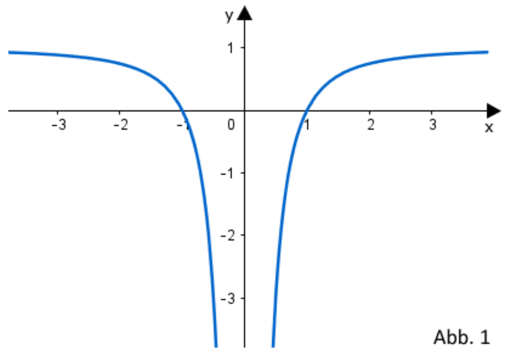


Abb. 1

Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Schnittpunkt zweier Funktionen

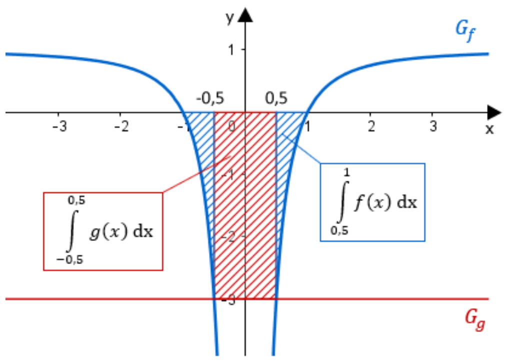
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -3$$

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Flächenberechnung



$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$g(x) = -3$

$$A = \left| \int_{-0,5}^{0,5} g(x)\ dx \right| + 2 \cdot \left| \int_{0,5}^{1} f(x)\ dx \right|$$

$$A = 3 \cdot 1 + 2 \cdot \left| \int_{0,5}^{1} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)\ dx \right|$$

$$A = 3 + 2 \cdot \left| \left[x + \frac{1}{x} \right]_{0,5}^{1} \right|$$

$A = 3 + 2 \cdot |(1+1) - (0,5+2)| = 3 + 2 \cdot 0,5 = 4$ FE (Flächeneinheiten)

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k : x \mapsto k\,x^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2|-3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Parameterwerte ermitteln

$p_k(x) = k\,x^2 - 4x - 3$

$p_k(2) = -3$

$k \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -3$

$4k - 11 = -3$

$k = 2$

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Nullstellen einer Funktion

$p_k(x) = k\,x^2 - 4x - 3$

$k\,x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4k \cdot (-3)}}{2k} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12k}}{2k}$$

$16 + 12k < 0$

$k < -\frac{16}{12} = \frac{-4}{3}$

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

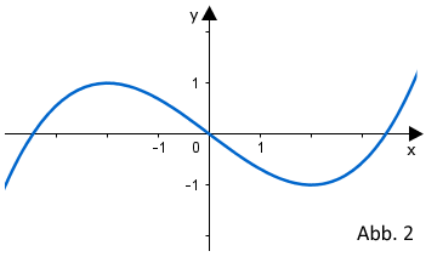


Abb. 2

Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

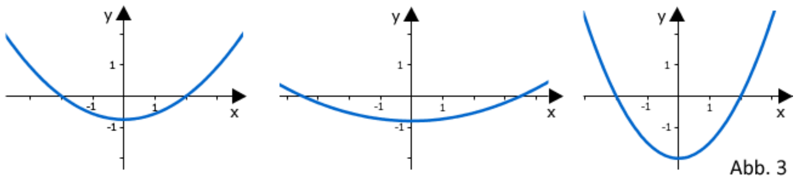


Abb. 3

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Graph der Ableitungsfunktion

Graph I

Begründung:

Graph II kommt nicht infrage, da die Nullstellen nicht bei $x \approx 2$ und $x \approx -2$ sind.

Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung im Ursprung $\approx -0,8$ ist.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

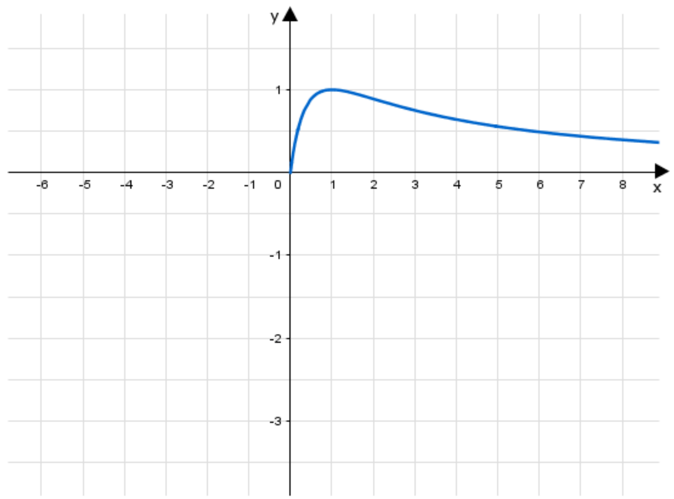
Monotonieverhalten der Integralfunktion

Für $1 \leq x \leq 3$ gilt: $F'(x) = f(x) < 0$.

Damit ist F im gegebenen Intervall streng monoton abnehmend.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{4x}{(x+1)^2}$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen G_f von f im I. Quadranten.



Begründen Sie, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle von f ist. Geben Sie die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an und begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass G_f die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ als waagrechte Asymptote besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Nullstellen einer Funktion

Die Zählerfunktion ist linear, es gibt nur 1 Nullstelle und zwar $x = 0$.

Asymptoten bestimmen

Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = -1$

Da die Nennerfunktion quadratisch ist, wird sie schneller wachsen als die Zählerfunktion. Die Funktionswerte von f werden also immer kleiner ohne jemals den Wert 0 anzunehmen.

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2} \qquad , D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $\quad u(x) = 4x \quad$ und $\quad v(x) = (x+1)^2$.
Dann ist $\quad u'(x) = 4 \quad$ und $\quad v'(x) = 2(x+1)$.

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x+1)^2 - 4x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4(x+1) \cdot (x+1-2x)}{(x+1)^4} = \frac{4 \cdot (1-x)}{(x+1)^3}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$\frac{4 \cdot (1-x)}{(x+1)^3} = 0$$

$$4 \cdot (1-x) = 0$$

$$x^E = 1$$

Lage des möglichen Extrempunkts:

$$y^E = f\ (1) = \frac{4}{2^2} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad E\ (1|1)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (1-x)}{(x+1)^3}$$

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $\quad u(x) = 4(1-x) \quad$ und $\quad v(x) = (x+1)^3$.
Dann ist $\quad u'(x) = -4 \quad$ und $\quad v'(x) = 3(x+1)^2$.

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x+1)^3 - 4(1-x) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot (-4(x+1) - 12(1-x))}{(x+1)^6}$$
$$f''(x) = \frac{-4x - 4 - 12 + 12x}{(x+1)^4}$$
$$f''(x) = \frac{8x - 16}{(x+1)^4}$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der möglichen Extremstelle untersuchen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$$f''(1) = \frac{8-16}{2^4} = -\frac{1}{2} < 0$$

$\Rightarrow \quad E\ (1|1) \quad$ Hochpunkt

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Begründen Sie, dass G_f für $x < 0$ nur im III. Quadranten verläuft, und zeichnen Sie in die Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f ein. Berechnen Sie dazu $f(-3)$ und drei weitere geeignete Funktionswerte von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

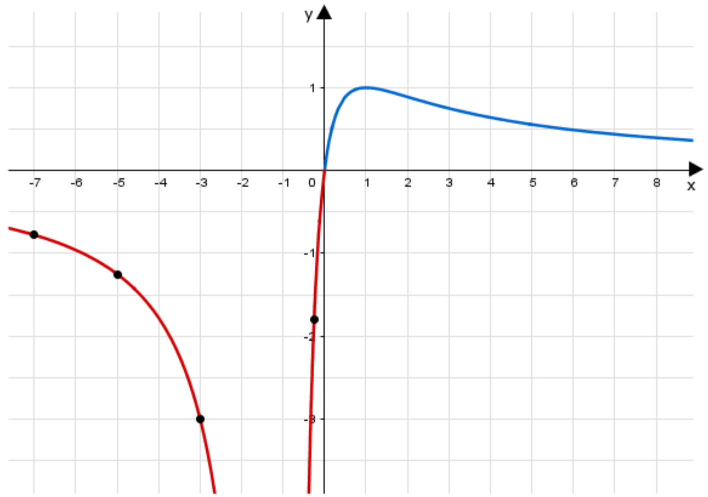
Monotonieverhalten einer Funktion

Für $x < 0$ ist $f(x) = \dfrac{\overbrace{4x}^{<0}}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} < 0$.

Skizze

$f(-3) = -3$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{\frac{9}{16}} = -\frac{16}{9} \approx -1,8$$
$$f(-5) = -\frac{20}{16} = -1,25$$
$$f(-7) = -\frac{28}{36} = -\frac{7}{9} \approx -0,8$$



Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Gegeben ferner die in $]-1;+\infty[$ definierte Funktion $F: x \mapsto 4 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{4}{x+1}$. Zeigen Sie, dass F für $x > -1$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Stammfunktion

$$F(x) = 4 \cdot \ln(x+1) + 4(x+1)^{-1}$$

$$F'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x+1} - 4(x+1)^{-2}$$

$$F'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{4\cdot(x+1)-4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Ein Pharmaunternehmen führt eine Studie zur Wirksamkeit und Verträglichkeit eines neu entwickelten Medikaments durch. Wenn das Medikament einmalig in Form einer Tablette eingenommen wird, kann die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten modellhaft durch die betrachtete Funktion f für $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden seit der Einnahme der Tablette und $f(x)$ für die Konzentration des Wirkstoffs im Blut des Patienten (im Weiteren kurz als Wirkstoffkonzentration bezeichnet) in Milligramm pro Liter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right)$.
Die folgenden Aufgaben e bis i sollen auf der Grundlage dieses Modells bearbeitet werden.

Berechnen Sie die Wirkstoffkonzentration 30 Minuten nach Einnahme der Tablette und geben Sie die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Anwendungsaufgabe

Wirkstoffkonzentration nach 30 Minuten:

$$f(0,5) = \frac{4\cdot 0,5}{(0,5+1)^2} \approx 0,89\ \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

Maximal auftretende Wirkstoffkonzentration: $1\ \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

An der Stelle $x = 2$ hat G_f einen Wendepunkt. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um dies zu begründen. Geben Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Wendepunkt ermitteln

Man zeigt für die zweite Ableitung f'' von f, dass $x = 2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel ist.

Zwei Stunden nach Einnahme der Tablette ist die Abnahme
der Wirkstoffkonzentration am größten.

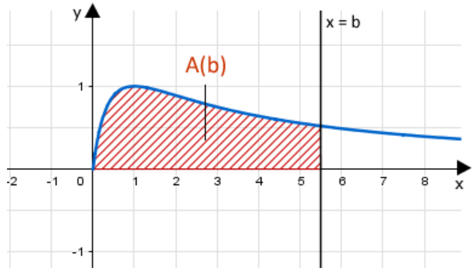
Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

In der Pharmakologie wird das in positive x-Richtung unbegrenzte Flächenstück, das sich im I. Quadranten zwischen G_f und der x-Achse befindet, als AUC („area under the curve“) bezeichnet. Nur dann, wenn diesem Flächenstück ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration auch für große Zeitwerte x realistisch beschreiben.

Die x-Achse, G_f und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(b)$ ein. Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabe d angegebenen Stammfunktion F einen Term für $A(b)$ und beurteilen Sie unter Verwendung dieses Terms, ob die Funktion f auch für große Zeitwerte eine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration darstellt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B g

Flächenberechnung



$$A(b) = \int_0^b f(x)\ \text{dx}$$

$A(b) = [F(x)]_0^b$

$A(b) = \left[4 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{4}{x+1}\right]_0^b$

$A(b) = \left(4 \cdot \ln(b+1) + \dfrac{4}{b+1}\right) - \left(4 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} + 4\right)$

$A(b) = 4 \cdot \ln(b+1) + \dfrac{4}{b+1} - 4$

Grenzwert bestimmen

$\lim\limits_{b \to +\infty} A(b) = \lim\limits_{b \to +\infty} \underbrace{4 \cdot \ln(b+1)}_{\to +\infty} + \underbrace{\dfrac{4}{b+1}}_{\to 0} - 4 = +\infty$

Die Funktion f stellt daher für große Zeitwerte keine realistische Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Wirkstoffkonzentration dar.

Teilaufgabe Teil B h (4 BE)

Das Medikament zeigt die gewünschte Wirkung erst ab einer bestimmten Wirkstoffkonzentration. Daher soll der Patient nach der ersten Tablette des Medikaments eine zweite identisch wirkende Tablette einnehmen, noch bevor die Konzentration des Wirkstoffs im Blut unter $0,75 \frac{\text{mg}}{l}$ fällt. Nach der Einnahme der zweiten Tablette erhöht sich die Wirkstoffkonzentration um die durch diese Tablette verursachte Konzentration des Wirkstoffs im Blut.

Ermitteln Sie durch Rechnung den spätesten Zeitpunkt, zu dem die zweite Tablette eingenommen werden soll.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B h

Quadratische Gleichung

$f(x) = 0,75$

$\dfrac{4x}{(x+1)^2} = 0,75 \qquad | \cdot (x+1)^2$

$4x = 0,75 \cdot (x+1)^2$

$4x = 0,75 \cdot (x^2 + 2x + 1)$

$4x = 0,75x^2 + 1,5x + 0,75 \qquad | -4x$

$0,75x^2 - 2,5x + 0,75 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-2,5) \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot 0,75 \cdot 0,75}}{2 \cdot 0,75} = \dfrac{2,5 \pm 2}{15}$

$x_1 = \dfrac{2,5+2}{1,5} = 3 \,;\, \left(x_2 = \dfrac{2,5-2}{1,5} = \dfrac{1}{3}\right)$

$x_2 = \dfrac{1}{3}$ entfällt, da die Wirkstoffkonzentration nach $\dfrac{1}{3} \cdot 60 = 20$ Minuten noch steigt.

Die Einnahme der zweiten Tablette sollte spätestens drei Stunden nach der Einnahme der ersten Tablette erfolgen.

Teilaufgabe Teil B i (3 BE)

Wird die zweite Tablette zweieinhalb Stunden nach der ersten Tablette eingenommen, so kann die Wirkstoffkonzentration für $x \in [2,5; 9]$ mit einem der folgenden Terme beschrieben werden. Wählen Sie den passenden Term aus und begründen Sie Ihre Wahl.

(A) $f(x) + f(x + 2,5)$
(B) $f(x) + f(x - 2,5)$
(C) $f(x - 2,5) + f(2,5)$
(D) $f(x) - f(x - 2,5)$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B i

2-dimensionale Geometrie

Term (B) ist richtig.

Der Term $f(x)$ beschreibt die Wirkstoffkonzentration nach Einnahme der ersten Tablette nach x Stunden.

Der Term $f(x - 2,5)$ beschreibt das gleiche für die Einnahme der zweiten Tablette, die 2,5-Stunden nach Einnhame der ersten erfolgt.

Beide Wirkstoffkonzentrationen addieren sich.

Teilaufgabe Teil B j (4 BE)

Verabreicht man das Medikament nicht in Form von Tabletten, sondern mittels einer Dauerinfusion, so wird der Wirkstoff langsam und kontinuierlich zugeführt. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k : x \mapsto \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1,5$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration während einer Dauerinfusion. Dabei ist x die seit Anlegen der Dauerinfusion vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die Wirkstoffkonzentration in $\frac{\text{mg}}{l}$.

Begründen Sie, dass der Graph von k streng monoton steigend ist.

(zur Kontrolle: $k'(x) = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B j

Monotonieverhalten einer Funktion

$$k(x) = \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1,5$$

Erste Ableitung bilden: $k'(x)$

$$k'(x) = \frac{3e^{2x} \cdot 2 \cdot \left(e^{2x}+1\right) - 3e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x}+1)^2} - 0 = \frac{6e^{2x} \cdot e^{2x} + 6e^{2x} - 6e^{2x} \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung $k'(x)$ untersuchen:

$$\frac{\overbrace{6e^{2x}}^{>0}}{\underbrace{\left(e^{2x}+1\right)^2}_{>0}} > 0$$

$k'(x) > 0 \quad$ für $\quad x \in \mathbb{R}$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow \quad k(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}$ streng monoton steigend

Teilaufgabe Teil B k (5 BE)

Bei Dauerinfusionen dieses Medikaments muss die Wirkstoffkonzentration spätestens 60 Minuten nach Beginn der Infusion dauerhaft größer als $0,75\frac{\text{mg}}{l}$ sein und stets mindestens 25% unter der gesundheitsschädlichen Grenze von $2\frac{\text{mg}}{l}$ liegen. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ und beurteilen Sie beispielsweise unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, ob gemäß der Modellierung diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B k

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{3 \cdot e^{2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{2x}+1}_{\to+\infty}} - 1,5$$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} \cdot 3}{e^{2x} \cdot \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} - 1,5 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1 + \underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}} - 1,5 = 3 - 1,5 = 1,5$$

Anwendungszusammenhang

Erste Bedingung:

" ... spätestens 60 Minuten nach Beginn der Infusion dauerhaft größer als $0,75$"

$k(1) = \frac{3 \cdot e^2}{e^2 + 1} - 1,5 \approx 1,14 > 0,75$

Zweite Bedingung:

" ... stets mindestens 25% unter der gesundheitsschädlichen Grenze von 2 ..."

$25\% \cdot 2 = 0,5$

$2 - 0,5 = 1,5 = \lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$

Da k streng monoton steigend, $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 1,5$ und $k(1) \approx 1,14$ ist, ist die Wirkstoffkonzentration nach Ablauf der 60 Minuten dauerhaft größer als $0,75\ \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ und liegt stets 25 % unter der gesundheitsschädlichen Grenze von $2\ \frac{\text{mg}}{\text{l}}$.