Abitur 2019 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

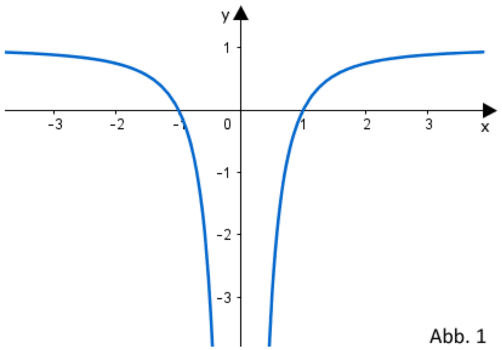


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\dfrac{1}{2}$ hat.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

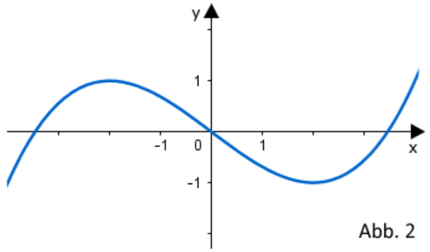


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

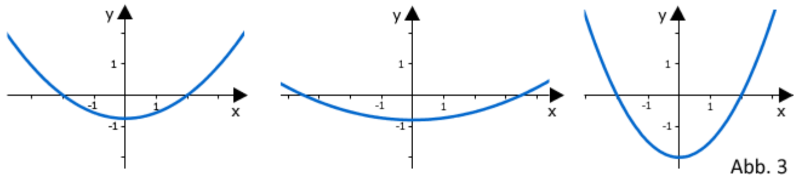


Abb. 3

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Betrachtet wird eine Schar von Funktionen h_k mit $k \in \mathbb{R}^+$, die sich nur in ihren jeweiligen Definitionsbereichen D_k unterscheiden.
Es gilt $h_k : x \mapsto \cos x$ mit $D_k = [0; k]$.
Abbildung 4 zeigt den Graphen der Funktion h_7. Geben Sie den größtmöglichen Wert von k an, sodass die zugehörige Funktion h_k umkehrbar ist. Zeichnen Sie für diesen Wert von k den Graphen der Umkehrfunktion von h_k in Abbildung 4 ein und berücksichtigen Sie dabei insbesondere den Schnittpunkt der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion.

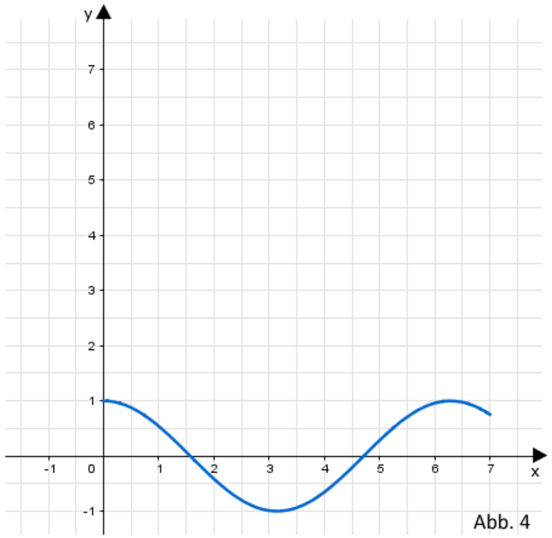


Abb. 4

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten und umkehrbaren Funktion j an, die folgende Bedingung erfüllt: Der Graph von j und der Graph der Umkehrfunktion von j haben keinen gemeinsamen Punkt.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \ln(x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Zeigen Sie, dass $D_f =]1; +\infty[$ ist, und geben Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an.

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Berechnen Sie die Nullstelle von f.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Beschreiben Sie, wie G_f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten von G_f.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$ mit Definitionsbereich $D_F =]1; +\infty[$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie den Term der Stammfunktion von f, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

Abbildung 1 zeigt ein Hinderniselement in einem Skate-Park.

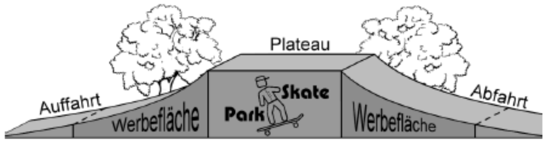


Abb. 1

Die Auffahrt des symmetrischen Hinderniselements geht in ein horizontal verlaufendes Plateau über, an das sich die Abfahrt anschließt. Die vordere und die hintere Seitenfläche verlaufen senkrecht zum horizontalen Untergrund. Um die vordere Seitenfläche mathematisch beschreiben zu können, wird ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt, dass die x-Achse die untere Begrenzung und die y-Achse die Symmetrieachse der betrachteten Fläche darstellt. Das Plateau erstreckt sich im Modell im Bereich $-2 \leq x \leq 2$. Die Profillinie der Abfahrt wird für $2 \leq x \leq 8$ durch den Graphen der in Aufgabe 1 untersuchten Funktion f beschrieben (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

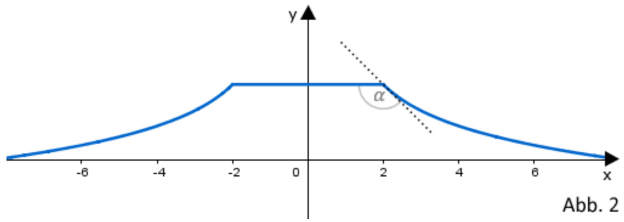


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f(2)$ im Sachzusammenhang und geben Sie den Term der Funktion q an, deren Graph G_q für $-8 \leq x \leq -2$ die Profillinie der Auffahrt im Modell beschreibt.

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Berechnen Sie die Stelle x_m im Intervall $[2; 8]$, an der die lokale Änderungsrate von f gleich der mittleren Änderungsrate in diesem Intervall ist.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Der in Aufgabe 2b rechnerisch ermittelte Wert x_m könnte alternativ auch ohne Rechnung näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 bestimmt werden. Erläutern Sie, wie Sie dabei vorgehen würden.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels α, den das Plateau und die Fahrbahn an der Kante zur Abfahrt einschließen (vgl. Abbildung 2).

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Die vordere Seitenfläche des Hinderniselements wird in Teilbereichen der Auf- und Abfahrt als Werbefläche verwendet (vgl. Abbildung 1). Im Modell handelt es sich um zwei Flächenstücke, nämlich um die Fläche zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $2 \leq x \leq 6$ sowie die dazu symmetrische Fläche im II. Quadranten. Berechnen Sie unter Verwendung der in Aufgabe 1d angegebenen Stammfunktion F, wie viele Quadratmeter als Werbefläche zur Verfügung stehen.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k : x \mapsto k\,x^3 + 3 \cdot (k+1)x^2 + 9x$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den zugehörigen Graphen G_k. Für jedes k besitzt der Graph G_k genau einen Wendepunkt W_k.

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von g_k an den Grenzen des Definitionsbereichs in Abhängigkeit von k an.

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Bestimmen Sie die x-Koordinate von W_k in Abhängigkeit von k.

(zur Kontrolle: $x = -\dfrac{1}{k} - 1$)

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der zugehörige Wendepunkt W_k auf der y-Achse liegt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Punkt W_k im Koordinatenursprung liegt und die Wendetangente, d. h. die Tangente an G_k im Punkt W_k, die Steigung 9 hat.

Teilaufgabe Teil B 3d (2 BE)

Für den in Aufgabe 3c bestimmten Wert von k zeigt Abbildung 3 den zugehörigen Graphen mit seiner Wendetangente. In diesem Koordinatensystem sind die beiden Achsen unterschiedlich skaliert.
Bestimmen Sie die fehlenden Zahlenwerte an den Markierungsstrichen der y-Achse mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks an der Wendetangente und tragen Sie die Zahlenwerte in Abbildung 3 ein.

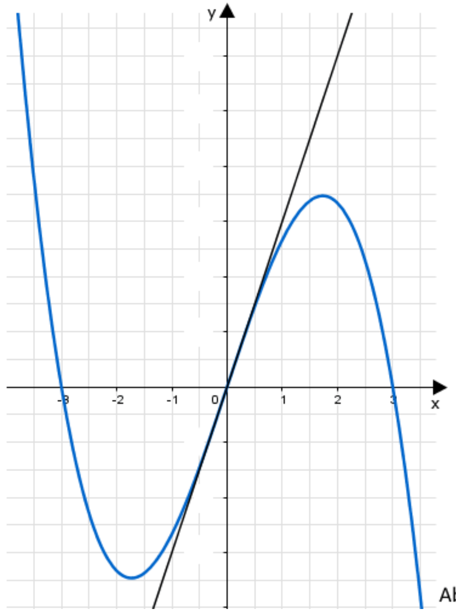


Abb. 3

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x} \qquad , D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $\quad u(x) = e^{2x} \quad$ und $\quad v(x) = x$.
Dann ist $\quad u'(x) = 2e^{2x} \quad$ und $\quad v'(x) = 1$.

Bemerkung: für die Ableitung der Exponentialfunktion $u(x)$ wird die Kettenregel verwendet.

Kettenregel:

$$u(x) = e^{g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad u'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{x^2}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$$\frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{x^2} = 0$$

$$\underbrace{e^{2x}}_{>0} \cdot (2x-1) = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x^E = \frac{1}{2}$$

Lage des möglichen Extrempunkts:

$$y^E = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2\cdot\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2e$$

$$\Rightarrow \quad E\left(\frac{1}{2}|2e\right)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{x^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung an der Stelle $x = \dfrac{1}{2}$ untersuchen:

$$\left.\begin{array}{ll} x < \frac{1}{2}: & \dfrac{\overbrace{e^{2x}}^{>0} \cdot \overbrace{(2x-1)}^{<0}}{\underbrace{x^2}_{>0}} < 0 \\[2em] x > \frac{1}{2}: & \dfrac{\overbrace{e^{2x}}^{>0} \cdot \overbrace{(2x-1)}^{>0}}{\underbrace{x^2}_{>0}} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad E\left(\frac{1}{2}|2e\right) \text{ Tiefpunkt}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

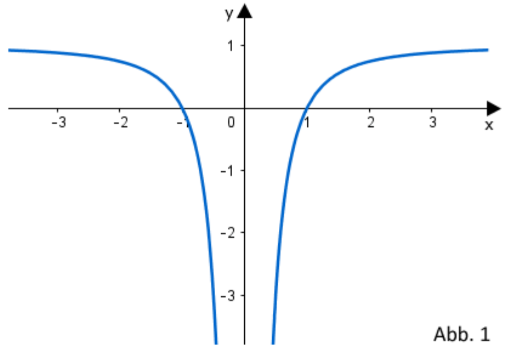


Abb. 1

Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\dfrac{1}{2}$ hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Schnittpunkt zweier Funktionen

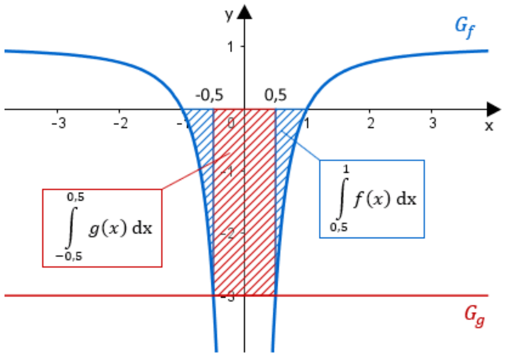
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -3$$

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Flächenberechnung



$f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$g(x) = -3$

$$A = \left| \int_{-0,5}^{0,5} g(x)\ \mathrm{dx} \right| + 2 \cdot \left| \int_{0,5}^{1} f(x)\ \mathrm{dx} \right|$$

$$A = 3 \cdot 1 + 2 \cdot \left| \int_{0,5}^{1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{dx} \right|$$

$$A = 3 + 2 \cdot \left| \left[x + \frac{1}{x} \right]_{0,5}^{1} \right|$$

$A = 3 + 2 \cdot |(1 + 1) - (0,5 + 2)| = 3 + 2 \cdot 0,5 = 4$ FE (Flächeneinheiten)

Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.

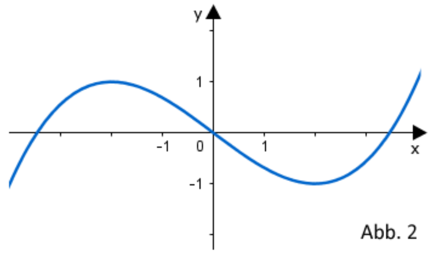


Abb. 2

Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an. Begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

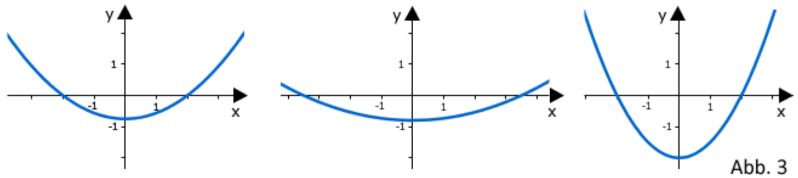


Abb. 3

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Graph der Ableitungsfunktion

Graph I

Begründung:

Graph II kommt nicht infrage, da die Nullstellen nicht bei $x \approx 2$ und $x \approx -2$ sind.

Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung im Ursprung $\approx -0,8$ ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Monotonieverhalten der Integralfunktion

Für $1 \leq x \leq 3$ gilt: $F'(x) = f(x) < 0$.

Damit ist F im gegebenen Intervall streng monoton abnehmend.

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Betrachtet wird eine Schar von Funktionen h_k mit $k \in \mathbb{R}^+$, die sich nur in ihren jeweiligen Definitionsbereichen D_k unterscheiden.
Es gilt $h_k : x \mapsto \cos x$ mit $D_k = [0; k]$.
Abbildung 4 zeigt den Graphen der Funktion h_7. Geben Sie den größtmöglichen Wert von k an, sodass die zugehörige Funktion h_k umkehrbar ist. Zeichnen Sie für diesen Wert von k den Graphen der Umkehrfunktion von h_k in Abbildung 4 ein und berücksichtigen Sie dabei insbesondere den Schnittpunkt der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion.

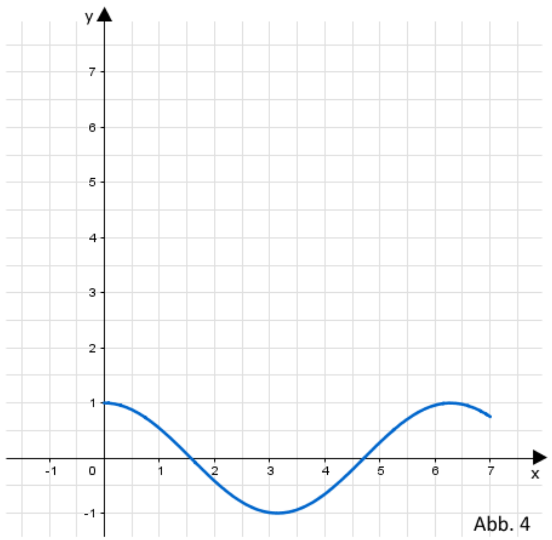


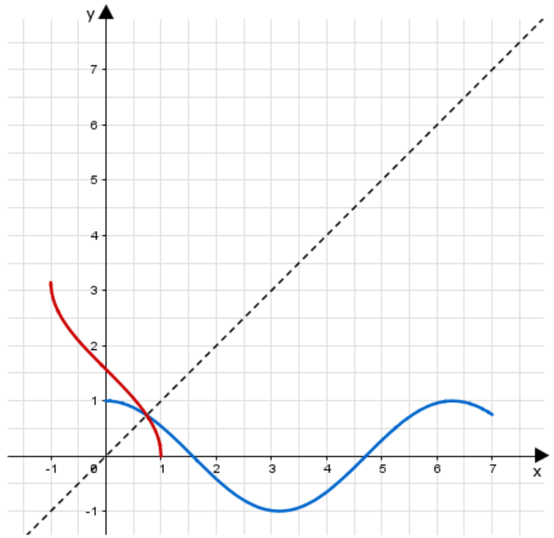
Abb. 4

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Umkehrfunktion bestimmen

$k = \pi$

Skizze



Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten und umkehrbaren Funktion j an, die folgende Bedingung erfüllt: Der Graph von j und der Graph der Umkehrfunktion von j haben keinen gemeinsamen Punkt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Umkehrfunktion bestimmen

z.B. $j(x) = e^x$

j ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und umkehrbar.

Der Graphen von j und j^{-1} haben keine gemeinsame Punkte.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \ln(x-1)$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Zeigen Sie, dass $D_f =]1; +\infty[$ ist, und geben Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = 2 - \ln(x-1)$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> $\ln(x-1)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(h(x))$.
>
> Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert. Somit gilt für die Argumentfunktion: $h(x) > 0$.
>
> In diesem Fall: $x - 1 > 0$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$\Rightarrow \quad D_f =]1; +\infty[$

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - \underbrace{\ln \underbrace{(x-1)}_{x \to 0^+}}_{\to -\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - \underbrace{\ln \underbrace{(x-1)}_{x \to \infty}}_{\to -\infty} = -\infty$$

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Berechnen Sie die Nullstelle von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Nullstellen einer Funktion

Nullstellen bestimmen: $f(x) = 0$

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$0 = 2 - \ln(x-1)$

$\ln(x-1) = 2 \qquad | \, e^x$

$x - 1 = e^2$

$x = e^2 + 1$

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Beschreiben Sie, wie G_f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten von G_f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Verschiebung von Funktionsgraphen

1. Verschiebung um 1 Einheit entlang der positiven x-Achse
   $\ln x \rightarrow \ln(x-1)$

2. Spiegelung an der x-Achse
   $\ln(x-1) \rightarrow -\ln(x-1)$

3. Verschiebung um 2 Einheiten entlang der positiven y-Achse
   $-\ln(x-1) \rightarrow 2-\ln(x-1)$

Monotonieverhalten einer Funktion

Der Graph der Funktion $\ln x$ ist streng monoton steigend.
Verschiebungen haben keine Auswirkung auf das Monotonieverhalten. Aufgrund der Spiegelung ist G_f streng monoton fallend.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto 3x-(x-1)\cdot\ln(x-1)$ mit Definitionsbereich $D_F =]1;+\infty[$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie den Term der Stammfunktion von f, die bei $x=2$ eine Nullstelle hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Stammfunktion

$F(x) = 3x-(x-1)\cdot\ln(x-1)$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = x-1$ und $v(x) = \ln(x-1)$.

Kettenregel für Logarithmusfunktionen:

$v(x) = \ln(g(x)) \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \dfrac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$

Hier ist $g(x) = x-1$.
Dann ist $g'(x) = 1$.

$$F'(x) = 3-\left[1\cdot\ln(x-1)+(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right] = 3-(\ln(x-1)+1) = 2-\ln(x-1) = f(x)$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$

$\Rightarrow \quad F$ ist Stammfunktion von f

Stammfunktion bestimmen

$F(x) = 3x-(x-1)\cdot\ln(x-1)+C \qquad C\in\mathbb{R}$

$F(2) = 3\cdot 2-(2-1)\cdot\ln(2-1)+C$

$0 = 6-0+C$

$C = -6$

$\Rightarrow \quad F(x) = 3x-(x-1)\cdot\ln(x-1)-6$

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Abbildung 1 zeigt ein Hinderniselement in einem Skate-Park.

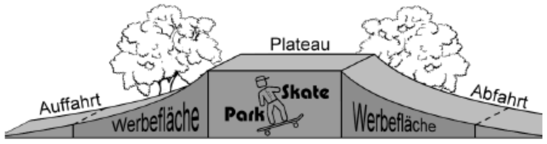


Abb. 1

Die Auffahrt des symmetrischen Hinderniselements geht in ein horizontal verlaufendes Plateau über, an das sich die Abfahrt anschließt. Die vordere und die hintere Seitenfläche verlaufen senkrecht zum horizontalen Untergrund. Um die vordere Seitenfläche mathematisch beschreiben zu können, wird ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt, dass die x-Achse die untere Begrenzung und die y-Achse die Symmetrieachse der betrachteten Fläche darstellt. Das Plateau erstreckt sich im Modell im Bereich $-2 \leq x \leq 2$. Die Profillinie der Abfahrt wird für $2 \leq x \leq 8$ durch den Graphen der in Aufgabe 1 untersuchten Funktion f beschrieben (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

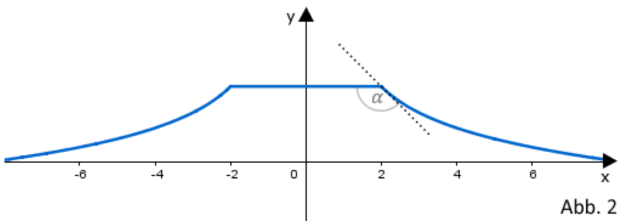


Abb. 2

Erläutern Sie die Bedeutung des Funktionswerts $f(2)$ im Sachzusammenhang und geben Sie den Term der Funktion q an, deren Graph G_q für $-8 \leq x \leq -2$ die Profillinie der Auffahrt im Modell beschreibt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Anwendungszusammenhang

$f(2)$: Höhe des Plateaus in m

Funktionsgleichung ermitteln

$f(x) = 2 - \ln(x-1)$

Erläuterung: *Spiegelung von Funktionsgraphen*

Der Graph von g entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der y-Achse im Bereich $2 \leq x \leq 8$.

$q(x) = f(-x) = 2 - \ln(-x-1)$

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Berechnen Sie die Stelle x_m im Intervall $[2;8]$, an der die lokale Änderungsrate von f gleich der mittleren Änderungsrate in diesem Intervall ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Mittleren Änderungsrate bestimmen

$f(x) = 2 - \ln(x-1)$

$$\frac{f(8)-f(2)}{8-2} = \frac{2-\ln 7-(2-\ln 1)}{6} = -\frac{\ln 7}{6}$$

Steigung eines Funktionsgraphen

$$f'(x) = -\frac{1}{x-1}$$

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{\ln 7}{6} \qquad \left| \cdot -\frac{6}{\ln 7}(x-1)\right.$$

$$x-1 = \frac{6}{\ln 7}$$

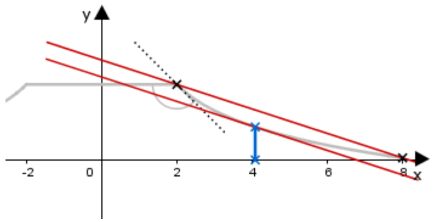
$$x = \frac{6}{\ln 7} + 1 \approx 4,1$$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Der in Aufgabe 2b rechnerisch ermittelte Wert x_m könnte alternativ auch ohne Rechnung näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 bestimmt werden. Erläutern Sie, wie Sie dabei vorgehen würden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Anwendungsaufgabe



1) Gerade durch $(2|f(2))$ und $(8|f(8))$ einzeichnen.

2) Parallele zu dieser Geraden, die G_f berührt, einzeichnen.

3) x-Wert des Berührpunktes entnehmen.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels α, den das Plateau und die Fahrbahn an der Kante zur Abfahrt einschließen (vgl. Abbildung 2).

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Winkel bestimmen

$$f(x) = 2 - \ln(x-1)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x-1} \qquad \text{(s. Teilaufgabe Teil B 2b)}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2-1} = -1$$

$$\tan\alpha = -1$$

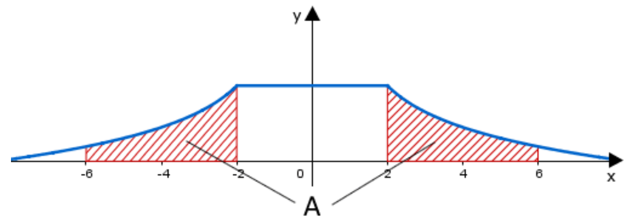
$$\Rightarrow \qquad \alpha = \tan^{-1}(-1) = 135^\circ$$

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Die vordere Seitenfläche des Hinderniselements wird in Teilbereichen der Auf- und Abfahrt als Werbefläche verwendet (vgl. Abbildung 1). Im Modell handelt es sich um zwei Flächenstücke, nämlich um die Fläche zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $2 \leq x \leq 6$ sowie die dazu symmetrische Fläche im II. Quadranten. Berechnen Sie unter Verwendung der in Aufgabe 1d angegebenen Stammfunktion F, wie viele Quadratmeter als Werbefläche zur Verfügung stehen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Flächenberechnung



$$A = 2 \cdot \int_2^6 f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$A = 2 \cdot [F(x)]_2^6$$

$$A = 2 \cdot [3x - (x-1) \cdot \ln(x-1)]_2^6$$

$$A = 2 \cdot (3 \cdot 6 - 5 \cdot \ln 5 - 6 + 1 \cdot 0)$$

$$A = 24 - 10\ln 5 \approx 7{,}91\ \mathrm{m}^2$$

Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k : x \mapsto k\,x^3 + 3 \cdot (k+1)x^2 + 9x$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den zugehörigen Graphen G_k. Für jedes k besitzt der Graph G_k genau einen Wendepunkt W_k.

Geben Sie das Verhalten von g_k an den Grenzen des Definitionsbereichs in Abhängigkeit von k an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$g_k(x) = k\,x^3 + 3(k+1)x^2 + 9x$

Für $k > 0$ gilt:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} g_k(x) = \infty$

Für $k < 0$ gilt:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} g_k(x) = -\infty$

Teilaufgabe Teil B 3b (3 BE)

Bestimmen Sie die x-Koordinate von W_k in Abhängigkeit von k.

(zur Kontrolle: $x = -\frac{1}{k} - 1$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b

Wendepunkt ermitteln

$g_k(x) = k\,x^3 + 3(k+1)x^2 + 9x$

Erste und zweite Ableitung bilden:

$g_k'(x) = 3k\,x^2 + 6(k+1)x + 9$

$g_k''(x) = 6k\,x + 6(k+1)$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^W erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $g_k''(x) = 0$

$6k\,x + 6(k+1) = 0$

$6k\,x + 6k + 6 = 0$

$6k\,x = -6k - 6 \qquad | : 6k$

$\Rightarrow \quad x^W = \dfrac{-k-1}{k}$

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der zugehörige Wendepunkt W_k auf der y-Achse liegt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Punkt W_k im Koordinatenursprung liegt und die Wendetangente, d. h. die Tangente an G_k im Punkt W_k, die Steigung 9 hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

Wendepunkt ermitteln

$g_k(x) = k\,x^3 + 3(k+1)x^2 + 9x$

$g_k'(x) = 3k\,x^2 + 6(k+1)x + 9$

$x^W = \dfrac{-k-1}{k} \qquad$ (s. Teilaufgabe Teil B 3b)

$x^W = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -k-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1$

$y^W = g_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_k(0|0)$

$g_k'\left(x^W\right) = g_k'(0) = 9$

Teilaufgabe Teil B 3d (2 BE)

Für den in Aufgabe 3c bestimmten Wert von k zeigt Abbildung 3 den zugehörigen Graphen mit seiner Wendetangente. In diesem Koordinatensystem sind die beiden Achsen unterschiedlich skaliert.
Bestimmen Sie die fehlenden Zahlenwerte an den Markierungsstrichen der y-Achse mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks an der Wendetangente und tragen Sie die Zahlenwerte in Abbildung 3 ein.

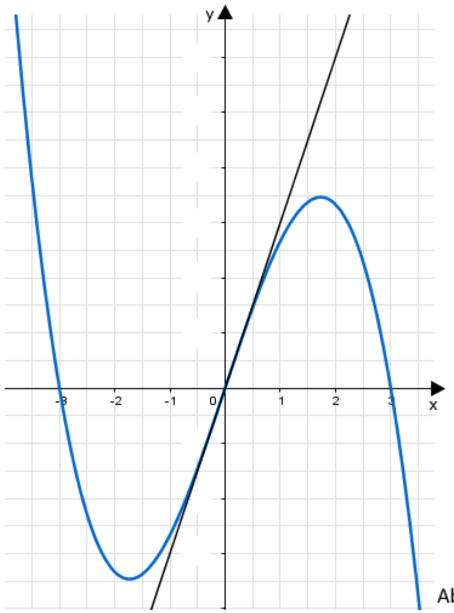


Abb. 3

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3d

Skizze