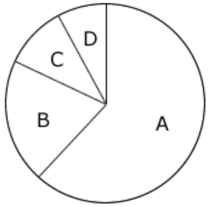
Abitur 2018 Mathematik Stochastik IV

Anlässlich einer Studie wurden 300 weibliche und 700 männliche Bewohner einer Großstadt im Alter von 18 bis 30 Jahren dazu befragt, ob sie Interesse an Car-Sharing haben. 20% der Befragten waren weiblich und gaben an, nicht interessiert zu sein. 8% der Befragten waren männlich und gaben an, Interesse an Car-Sharing zu haben. Das Kreisdiagramm veranschaulicht die absoluten Häufigkeiten, die sich bei der Befragung ergaben.



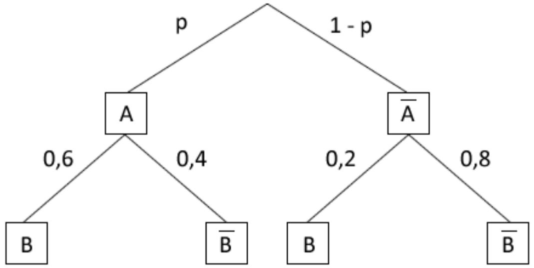
Teilaufgabe Teil A 1a (4 BE)

Ordnen Sie die Beschriftungen 1 bis 4 den Sektoren A bis D korrekt zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Berechnen Sie die Größe des Mittelpunktswinkels desjenigen Sektors, der den Anteil der Befragten veranschaulicht, die männlich waren und angaben, Interesse an Car-Sharing zu haben.

Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit $0,3$ eintritt.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4% der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

50 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Genau zwei der Teile sind fehlerhaft.“
B: „Mindestens 6% der Teile sind fehlerhaft.“

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4%.“ auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

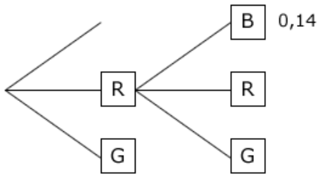
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

Teilaufgabe Teil B 2c (5 BE)

Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei werden der grüne und der rote Sektor verkleinert, wobei der Mittelpunktswinkel des roten Sektors wieder doppelt so groß wie der des grünen Sektors ist. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die beiden ersten Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.

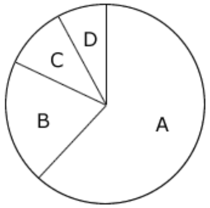


Bestimmen Sie die Größe des zum grünen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (4 BE)

Anlässlich einer Studie wurden 300 weibliche und 700 männliche Bewohner einer Großstadt im Alter von 18 bis 30 Jahren dazu befragt, ob sie Interesse an Car-Sharing haben. 20% der Befragten waren weiblich und gaben an, nicht interessiert zu sein. 8% der Befragten waren männlich und gaben an, Interesse an Car-Sharing zu haben. Das Kreisdiagramm veranschaulicht die absoluten Häufigkeiten, die sich bei der Befragung ergaben.



1 Frauen mit Interesse an Car-Sharing
2 Frauen ohne Interesse an Car-Sharing
3 Männer mit Interesse an Car-Sharing
4 Männer ohne Interesse an Car-Sharing

Ordnen Sie die Beschriftungen 1 bis 4 den Sektoren A bis D korrekt zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

M: „männlicher Bewohner“
W: „weiblicher Bewohner“

C: „ist an Car-Sharing interessiert“
$\overline{C}$: „ist nicht an Car-Sharing interessiert“

$300 + 700 = 1000$ Bewohner wurden insgesamt befragt.

$\left|W \cap \overline{C}\right| = 20\% \cdot 1000 = 200$

$|M \cap C| = 8\% \cdot 1000 = 80$

Werte in einer Vierfeldertafel eintragen:

	M	W	
C	80		
$\overline{C}$		200	
	700	300	1000

Vierfeldertafel vervollständigen:

	M	W	
C	80	100	180
$\overline{C}$	620	200	820
	700	300	1000

$\Rightarrow$ 1 C, 2 B, 3 D, 4 A

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Berechnen Sie die Größe des Mittelpunktswinkels desjenigen Sektors, der den Anteil der Befragten veranschaulicht, die männlich waren und angaben, Interesse an Car-Sharing zu haben.

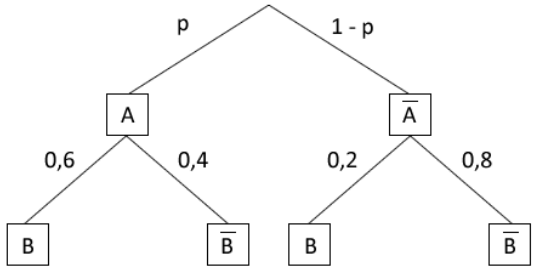
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Wahrscheinlichkeit

$8\% \cdot 360° = 28{,}8°$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

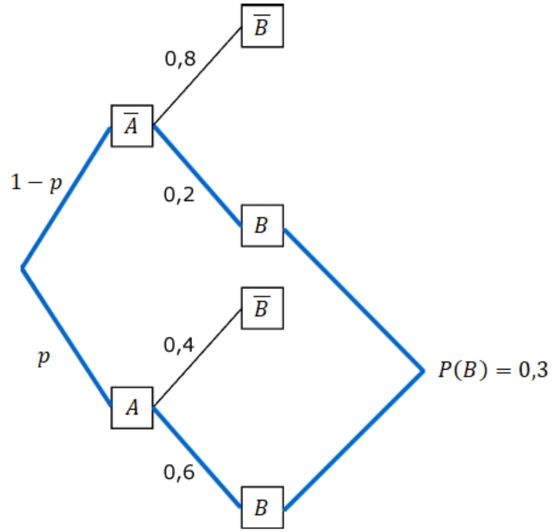
Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}3$ eintritt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wahrscheinlichkeit



Erläuterung: *1. Pfadregel, 2. Pfadregel*

2. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

In diesem Fall: $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$

1. Pfadregel: In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

In diesem Fall:

$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P_{\overline{A}}(B)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$

$P(B) = p \cdot 0,6 + (1-p) \cdot 0,2$

$P(B) = 0,4 \cdot p + 0,2$

$0,3 = 0,4 \cdot p + 0,2$

$0,4 \cdot p = 0,1$

$\Rightarrow \quad p = 0,25$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Wahrscheinlichkeit

$P(B) = 0,4 \cdot p + 0,2$

Für $p = 1$ ist $P(B) = 0,6$.

$\Rightarrow \quad P(B) \leq 0,6$, da $p \leq 1$

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4% der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

50 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Genau zwei der Teile sind fehlerhaft.“
B: „Mindestens 6% der Teile sind fehlerhaft.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Binomialverteilung

Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 4\% = 0,04$.

$P(A) = P_{0,04}^{50}(X = 2) \overset{\text{TW}}{=} 0,27623 \approx 27,6\%$

$6\% \cdot 50 = 3$

$P(B) = P_{0,04}^{50}(X \geq 3)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(„mindestens k Treffer“) $= 1 - P$(„höchsten k-1 Treffer“)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

$P(B) = 1 - P_{0,04}^{50}(X \leq 2) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,67671 = 0,32329 \approx 32,3\%$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4%.“ auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p \geq 0,04$

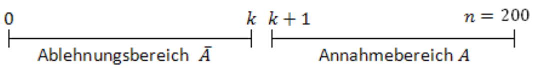
Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 100]$

> Erläuterung: *Nullhypothese*
>
> Da hier die Nullhypothese „ $p \geq 0,04$" bzw. „ **mindestens** 4%" lautet, liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



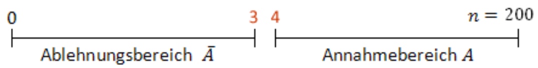
Fehler 1. Art bestimmen:

> Erläuterung: *Fehler 1.Art*
>
> Man spricht von „Fehler 1. Art", wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.
>
> Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).
>
> $\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,04}^{200}(X \leq k) \leq 0,05$

$P_{0,04}^{200}(X \leq k) \leq 0,05$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 3$

Entscheidungsregel:



Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Hypothesentest - Fehler erster Art

Es soll vermieden werden, das teurere Granulat einzusetzen, obwohl sich der Anteil fehlerhafter Teile nicht reduziert hat.

Das Risiko irrtümlich das teurere einzusetzen, beträgt dann höchstens 5%.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Wahrscheinlichkeit

$$p(\text{„Blau"}) = \frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$$

$$p(\text{„Rot"}) = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$$

$$p(\text{„Grün"}) = \frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$$

> Erläuterung: *Permutation*
>
> Die 3 Farben lassen sich auf 3! verschiedene Arten anordnen (permutieren).

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{blau}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{rot}} \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{grün}} \underbrace{\cdot 3!}_{\text{Anzahl Reihenfolgen}} = \frac{1}{6}$$

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellen:

x_i in €	10	a	0
Ereignis	3 gleiche Farben	3 versch. Farben	Rest
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

> Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*
>
> Nimmt eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an, so gilt für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße:
>
> $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{6} + a \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{4}{6} = \frac{10+a}{6}$$

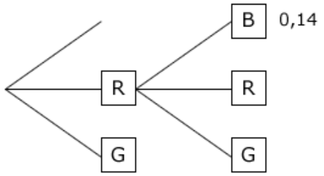
$$5 = \frac{10+a}{6}$$

$$30 = 10 + a$$

$$\Rightarrow \quad a = 20$$

Teilaufgabe Teil B 2c (5 BE)

Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei werden der grüne und der rote Sektor verkleinert, wobei der Mittelpunktswinkel des roten Sektors wieder doppelt so groß wie der des grünen Sektors ist. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die beiden ersten Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.



Bestimmen Sie die Größe des zum grünen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

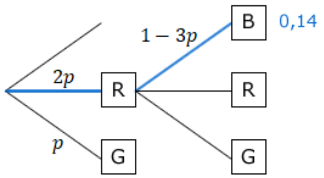
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Wahrscheinlichkeit

Sei $p = P(G)$ die Wahrscheinlichkeit den grünen Sektor zu erzielen, dann gilt:

$P(R) = 2p$

$P(B) = 1 - p - 2p = 1 - 3p$



$0,14 = 2p \cdot (1 - 3p)$

$-6p^2 + 2p - 0,14 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-6) \cdot (-0,14)}}{-12} = \frac{-2 \pm 0,8}{-12}$$

$$\Rightarrow \quad (p_2 \approx 0,23) \qquad p = 0,1, \text{ da } p < \frac{1}{6}$$

Winkel: $360^\circ \cdot 0,1 = 36^\circ$