Fachabitur 2018 Mathematik NT Stochastik S II

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bei einem internationalen Fußballwettbewerb überlegt der Veranstalter schon im Vorfeld, aus welchen Gruppen sich die Besucher in den Stadien zusammensetzen. Man rechnet mit 60% fanatische Anhänger (F) der jeweiligen Mannschaften. Die restlichen Besucher sind neutral (N). Die Hälfte aller Personen in den Stadien wird wohl Alkohol trinken (A). Ohne Alkoholgenuss geht man bei 2% der Besucher von einer gewissen Gewaltbereitschaft (G) aus. Durch Alkoholgenuss verfünffacht sich diese Wahrscheinlichkeit.
Zu welcher der verschiedenen Kategorien eine beliebig herausgegriffene Person im Stadion zählt, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Sowohl der Alkoholgenuss als auch die Gewaltbereitschaft sind unabhängig von der Gruppenzugehörigkeit zu den Gruppen F oder N.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Es werden folgende Ereignisse definiert:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt keinen Alkohol."

E_2 : „Die Person ist fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit."

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und prüfen Sie sie auf stochastische Unabhängigkeit.

Teilaufgabe 1.3 (2 BE)

Geben Sie in Mengenschreibweise ein Ereignis E_3 an, das unvereinbar mit E_1 ist und dessen Wahrscheinlichkeit 42% von $P(E_1)$ beträgt.

Teilaufgabe 2. (5 BE)

Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80% von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt.
Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{K \cup \overline{V}}$ und interpretieren Sie E_4 im Sinne der vorliegenden Thematik.

Die Zufallsgröße X gibt die Tordifferenz bei den Spielergebnissen im Turnier an. Unter Vernachlässigung von Tordifferenzen größer als fünf ergibt sich mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,5	$2b$	a	$5b - 0{,}4$	$2a - 0{,}24$	0,02

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Berechnen Sie die Parameter a und b, wenn $P(X \leq 2) = 0,84$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

[Teilergebnis : $a = 0,14$]

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 3.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Beim Elfmeterschießen erzielen die Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,75$ tatsächlich ein Tor. Es werden nun 10 Elfmeter betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_5 : „Mehr als 3, aber weniger als 8 Schützen erzielen ein Tor."

E_6 : „Nur die ersten 4 oder nur die letzten 4 Elfmeter ergeben ein Tor."

Die Fehlerquote bei Entscheidungen der eingesetzten Schiedsrichter soll höchstens 12,5% betragen. Bei einem der jüngeren Schiedsrichter vermutet man aber einen höheren Anteil (Gegenhypothese). In nächster Zeit werden deshalb 200 seiner Entscheidungen auf Fehler hin untersucht.

Teilaufgabe 5.1 (5 BE)

Geben Sie zu diesem Test Testgröße und Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Teilaufgabe 5.2 (2 BE)

Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bei einem internationalen Fußballwettbewerb überlegt der Veranstalter schon im Vorfeld, aus welchen Gruppen sich die Besucher in den Stadien zusammensetzen. Man rechnet mit 60% fanatische Anhänger (F) der jeweiligen Mannschaften. Die restlichen Besucher sind neutral (N). Die Hälfte aller Personen in den Stadien wird wohl Alkohol trinken (A). Ohne Alkoholgenuss geht man bei 2% der Besucher von einer gewissen Gewaltbereitschaft (G) aus. Durch Alkoholgenuss verfünffacht sich diese Wahrscheinlichkeit.
Zu welcher der verschiedenen Kategorien eine beliebig herausgegriffene Person im Stadion zählt, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Sowohl der Alkoholgenuss als auch die Gewaltbereitschaft sind unabhängig von der Gruppenzugehörigkeit zu den Gruppen F oder N.

Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

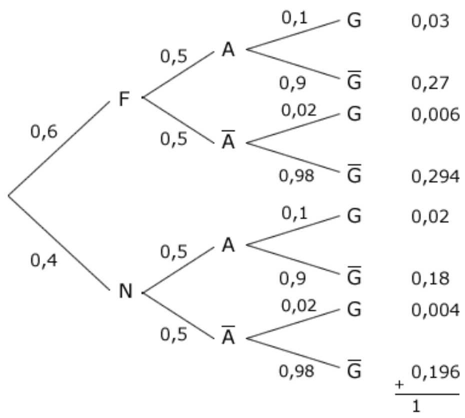
$P(F) = 60\% = 0,6$
$P(N) = 1 - 0,6 = 0,4$

$P(A) = \dfrac{1}{2} = 0,5$
$P(\overline{A}) = 1 - 0,5 = 0,5$

$P_{\overline{A}}(G) = 2\% = 0,02$
$P_{\overline{A}}(\overline{G}) = 1 - 0,02 = 0,98$

$P_A(G) = 5 \cdot 0,02 = 0,1$
$P_A(\overline{G}) = 1 - 0,1 = 0,9$

Baumdiagramm zeichnen:



Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Es werden folgende Ereignisse definiert:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt keinen Alkohol.“

E_2 : „Die Person ist fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit.“

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und prüfen Sie sie auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Ereignis in Mengenschreibweise

$E_1 = \{F\,\overline{A}\,G, F\,\overline{A}\,\overline{G}, N\,\overline{A}\,G, N\,\overline{A}\,\overline{G}\}$

$E_2 = \{F\,A\,\overline{G}, F\,\overline{A}\,\overline{G}, N\,A\,G, N\,\overline{A}\,G\}$

Stochastische Unabhängigkeit

$P\ (E_1) = 0,5$

$P\ (E_2) = 0,27 + 0,294 + 0,02 + 0,004 = 0,588$

$E_1 \cap E_2 = \{F\,\overline{A}\,\overline{G}, N\,\overline{A}\,G\}$

$P\ (E_1 \cap E_2) = 0,294 + 0,004 = 0,298$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist (s. auch Merkhilfe Mathematik).

$P\ (E_1) \cdot P\ (E_2) = 0,5 \cdot 0,588 = 0,294 \neq 0,298 = P\ (E_1 \cap E_2)$

$\Rightarrow \quad E_1$ und E_2 sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe 1.3 (2 BE)

Geben Sie in Mengenschreibweise ein Ereignis E_3 an, das unvereinbar mit E_1 ist und dessen Wahrscheinlichkeit 42% von $P(E_1)$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Unvereinbarkeit zweier Ereignisse

$E_1 = \{F\,\overline{A}\,G, F\,\overline{A}\,\overline{G}, N\,\overline{A}\,G, N\,\overline{A}\,\overline{G}\}$

$E_3 = \{F\,A\,G, N\,A\,\overline{G}\}$

$42\% \cdot P\ (E_1) = 0,42 \cdot 0,5 = 0,21$

$P\ (E_3) = 0,03 + 0,18 = 0,21$

Teilaufgabe 2. (5 BE)

Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80% von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt.
Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{K \cup \overline{V}}$ und interpretieren Sie E_4 im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 2.

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

$P(K) = 80\% = 0,8$
$|K| = 0,8 \cdot 400 = 320$

$|V| = 180$
$P(V) = \dfrac{180}{400} = 0,45$
$|V \cap K| = \dfrac{2}{3} \cdot 180 = 120$
$P(V) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,45 = 0,3$

	K	$\overline{K}$	Σ
V	0,3	0,15	0,45
$\overline{V}$	0,5	0,05	0,55
Σ	0,8	0,2	1

oder

	K	$\overline{K}$	Σ
V	120	60	180
$\overline{V}$	200	20	220
Σ	320	80	400

Wahrscheinlichkeit

$E_4 = \overline{K \cup \overline{V}} = \overline{K} \cap \overline{\overline{V}} = \overline{K} \cap V$

$P\ (E_4) = 0,15$

Der Spieler wird verwarnt, aber nicht wegen eines Fauls.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die Tordifferenz bei den Spielergebnissen im Turnier an. Unter Vernachlässigung von Tordifferenzen größer als fünf ergibt sich mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,5	$2b$	a	$5b - 0,4$	$2a - 0,24$	0,02

Berechnen Sie die Parameter a und b, wenn $P(X \leq 2) = 0,84$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

[Teilergebnis : $a = 0,14$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$P(X \geq 2) = 0,84$

I. $0,5 + 2b + a = 0,84 \quad \Rightarrow \quad a = 0,34 - 2b$

Weiterhin gilt:

II. $0,5 + 2b + a + 5b - 0,4 + 2a - 0,24 + 0,02 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 7b + 3a = 1,12$

Lineares Gleichungssystem lösen:

I. in II. einsetzen: $3(0,34 - 2b) + 7b = 1,12 \quad \Rightarrow \quad b = 0,1$

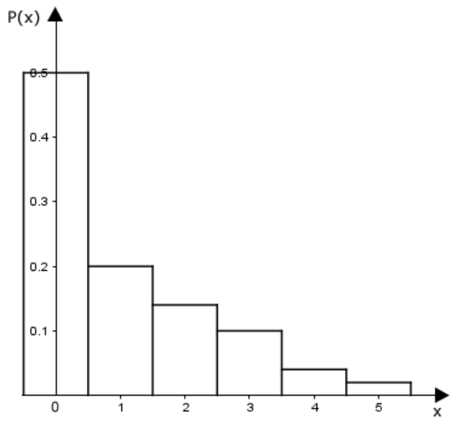
$b = 0,1$ in I. einsetzen: $a = 0,34 - 2 \cdot 0,1 = 0,14$

Skizze

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,5	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Histogramm:



Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 3.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,5	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

$\mu = E(X) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,02 = 1,04$

Standardabweichung einer Zufallsgröße

$\text{Var}(x) = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,14 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,04 + 5^2 \cdot 0,02 - 1,04^2 \approx 1,72$

$\sigma = \sqrt{1,72} \approx 1,31$

Wahrscheinlichkeit

$\mu - \sigma = -0,27$

$\mu + \sigma = 2,35$

$P(-0,27 < X < 2,35) = P(0 \leq X \leq 2) = 0,5 + 0,2 + 0,14 = 0,84$

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Beim Elfmeterschießen erzielen die Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,75$ tatsächlich ein Tor. Es werden nun 10 Elfmeter betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_5 : „Mehr als 3, aber weniger als 8 Schützen erzielen ein Tor.“

E_6 : „Nur die ersten 4 oder nur die letzten 4 Elfmeter ergeben ein Tor.“

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Binomialverteilung

$n = 10$; $p = 0,75$

$P\ (E_5) = P(3 < X < 8)$

$P\ (E_5) = P(4 \leq X \leq 7)$

$P\ (E_5) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) \overset{\text{TW}}{=} 0,47441 - 0,00351 = 0,4709$

$P\ (E_6) = 0,75^4 \cdot 0,25^6 \cdot 2 = 0,00015$

Teilaufgabe 5.1 (5 BE)

Die Fehlerquote bei Entscheidungen der eingesetzten Schiedsrichter soll höchstens $12,5\%$ betragen. Bei einem der jüngeren Schiedsrichter vermutet man aber einen höheren Anteil (Gegenhypothese). In nächster Zeit werden deshalb 200 seiner Entscheidungen auf Fehler hin untersucht.

Geben Sie zu diesem Test Testgröße und Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

X: Anzahl der Fehlentscheidungen, von 200.

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,125$

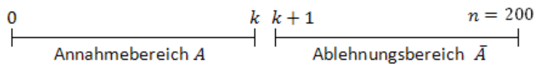
Gegenhypothese: $H_1 : p_1 > 0,125$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Erläuterung: *Nullhypothese, Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese “ $p_1 > 0,125$“ bzw. „Anteil **höher** (als)“ lautet, liegt der Annahmebereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Annahmebereich von H_0: $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k + 1, 200]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ , wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($X \geq k + 1$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P^{200}_{0,125}(X \geq k + 1) \leq 0,05$

$P^{200}_{0,125}(X \geq k + 1) \leq 0,05$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(„mindestens $k+1$ Treffer“) $= 1 - P$(„höchstens k Treffer“)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k + 1) = 1 - P(X \leq k)$

$1 - P^{200}_{0,125}(X \leq k) \leq 0,05$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - P_{0,125}^{200}(X \leq k) \leq 0,05 \qquad | -1$

$-P_{0,125}^{200}(X \leq k) \leq -0,95 \qquad | \cdot(-1)$

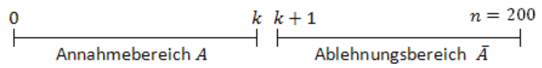
(Das Relationszeichen dreht sich, da mit einer negativen Zahl multipliziert wird.)

$P_{0,125}^{200}(X \leq k) \geq 0,95$

$P_{0,125}^{200}(X \leq k) \geq 0,95$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \geq 33$

Entscheidungsregel:



$\overline{A} = \{34, \ldots, 200\}$

Teilaufgabe 5.2 (2 BE)

Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

Lösung zu Teilaufgabe 5.2

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

Obwohl die Fehlerquote höher ist, nimmt man wegen des Testergebnisses an, dass auch der junge Schiedsrichter nur eine Fehlerquote von höchstens $12,5\%$ hat.