Abitur 2018 Mathematik Geometrie VI

Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(0|2|2)$ und $C(-1|2|0)$ liegen in der Ebene E.

Teilaufgabe Teil A 1a (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E mit der x_2-Achse an.

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|-6|6)$ und $F(2|-4|4)$ sowie die Gerade

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

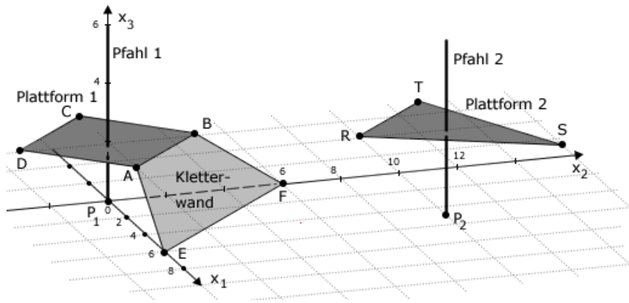
Teilaufgabe Teil A 2a (4 BE)

Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B. Zeigen Sie, dass sich g und h im Punkt F senkrecht schneiden.

Teilaufgabe Teil A 2b (1 BE)

Ein Punkt C liegt auf g und ist verschieden von F. Geben Sie die besondere Bedeutung der Strecke $[C\,F]$ im Dreieck $A\,B\,C$ an.

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die $x_1\,x_2$-Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20% länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.

(zur Kontrolle: $L : 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt. Einer der beiden unteren Eckpunkte befindet sich an Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt an Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes 1,80 m. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Netzes und erläutern Sie Ihren Ansatz.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch die Strecke $[RT]$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Im Modell hat dieser Eckpunkt die Koordinaten $(5|10|h)$ mit einer reellen Zahl $h > 3$. Die untere Netzkante liegt auf der Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand des betrachteten Eckpunkts von der Plattform 2.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (4 BE)

Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(0|2|2)$ und $C(-1|2|0)$ liegen in der Ebene E.

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene E:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$A(1|1|1)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E : \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$E : -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 - 3 + 1$

$E : -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4 = 0$

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E mit der x_2-Achse an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Spurpunkte einer Ebene

$E : -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4$

x_2-Koordinatenachse: $\quad \overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Spurpunkte einer Ebene*

Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Spurpunkte.
Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Koordinatenachse in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebene ein, löst nach dem Parameter λ auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

Spurpunkt S_2 mit der x_2-Koordinatenachse:

$0 - 3\lambda + 0 = -4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad S_2 \left(0|\frac{4}{3}|0\right)$

Teilaufgabe Teil A 2a (4 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|-6|6)$ und $F(2|-4|4)$ sowie die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B. Zeigen Sie, dass sich g und h im Punkt F senkrecht schneiden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Geradengleichung aufstellen

Richtungsvektor der Geraden h:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{A}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden h.

$$h: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung von Vektoren

Skalarprodukt der Richtungsvektoren der Geraden g und h bilden:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 + 0 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad g \perp h$$

Lagebeziehung Punkt und Gerade

Für $\mu = \frac{2}{3}$ ist: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{F}}.$

Für $\lambda = -1$ ist: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{F}}.$

Der Punkt F liegt sowohl auf g als auch auf h.

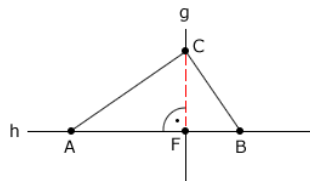
Teilaufgabe Teil A 2b (1 BE)

Ein Punkt C liegt auf g und ist verschieden von F. Geben Sie die besondere Bedeutung der Strecke $[C\,F]$ im Dreieck $A\,B\,C$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

2-dimensionale Geometrie

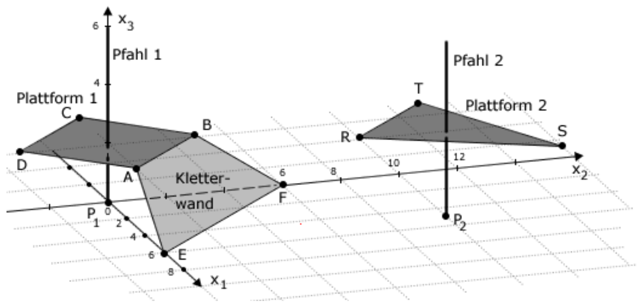
z. B.:



Im Dreieck $A\,B\,C$ ist die Strecke $[C\,F]$ die Höhe vom Eckpunkt C auf die Seite $[A\,B]$.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.

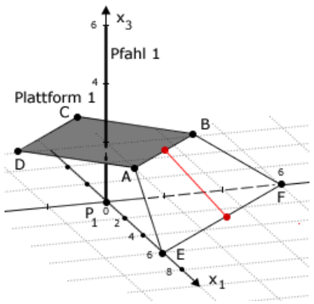


Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die $x_1\,x_2$-Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20% länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Mittelpunkt einer Strecke



> Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*
>
> Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:
>
> $$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M}_{AB} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M}_{EF} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{M_{AB}\,M_{EF}} = \overrightarrow{M}_{EF} - \overrightarrow{M}_{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M_{AB}\,M_{EF}}\right| = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2 + (-2)^2} = \sqrt{8,5}$$

Länge des Seils: $1,2 \cdot \sqrt{8,5} = 3,5$ m

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.

(zur Kontrolle: $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene L:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$A(3|0|2)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene L.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_L}$ der Ebene L bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - 0 \\ 0 - (-3) \cdot (-2) \\ 0 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $-\dfrac{1}{3}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_L} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$L : \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_L}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$$L : 2x_1 + 2x_2 + 3x_1 = 6 + 0 + 6$$

$$L : 2x_1 + 2x_2 + 3x_1 - 12 = 0$$

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\overrightarrow{EF}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$, also parallel.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

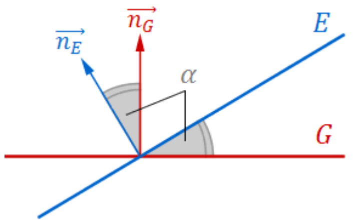
Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Winkel zwischen zwei Ebenen

Normalenvektor $\overrightarrow{n_L}$ der Ebene L: $\quad \overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene L und der $x_1 x_2$-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Ebenen*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$-Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right) \approx 43{,}31^\circ$$

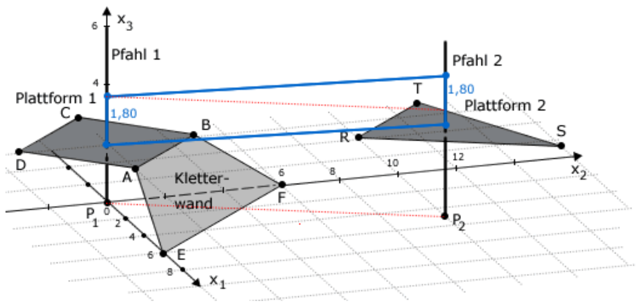
Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt. Einer der beiden unteren Eckpunkte befindet sich an Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt an Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes 1,80 m. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Netzes und erläutern Sie Ihren Ansatz.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Länge eines Vektors



$P_1(0|0|0)$
$P_2(5|10|0)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{5^2 + 10^2 + 0} = \sqrt{125}$$

Flächeninhalt eines Parallelogramms

$$A = 1,8 \cdot \sqrt{125} \approx 20,12 \text{ m}^2$$

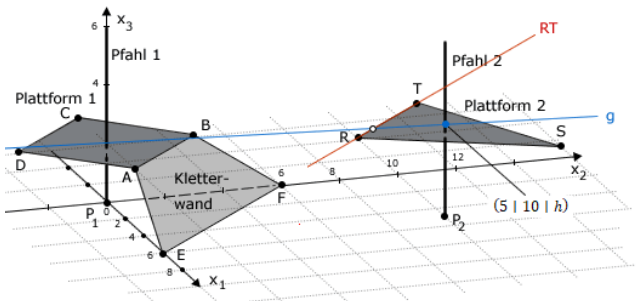
Parallelogramm mit Höhe $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$ und der Grundseite der Länge 1,8 m.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch die Strecke $[RT]$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Im Modell hat dieser Eckpunkt die Koordinaten $(5|10|h)$ mit einer reellen Zahl $h > 3$. Die untere Netzkante liegt auf der Geraden $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Abstand des betrachteten Eckpunkts von der Plattform 2.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Geradengleichung aufstellen



$R(5|7|3)$
$T(2|10|3)$

Richtungsvektor der Geraden RT:

$$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{T} - \overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn R als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{R}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden RT.

$$RT: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{R}} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnitt zweier Geraden

Gerade RT und g schneiden: $RT \cap g$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen werden gleichgesetzt. Es entsteht somit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird auf die rechte und der Term $\lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}$ auf die linke Seite gebracht.

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrcl} \text{I.} & -3\mu - 5\lambda & = & -5 \\ \text{II.} & 3\mu - 10\lambda & = & -7 \\ \text{III.} & -\lambda(h-2) & = & -1 \end{array}$$

$\text{I} + \text{II}$: $\quad -15\lambda = -12 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{5}$

λ in III: $\quad -\frac{4}{5}(h-2) = -1 \quad \Rightarrow \quad h - 2 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 3,25$

Abstand: $\quad 3,25 - 3 = 0,25$ m