Abitur 2017 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x + 7 + \dfrac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung $y = x + 7$ für G_f an.

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

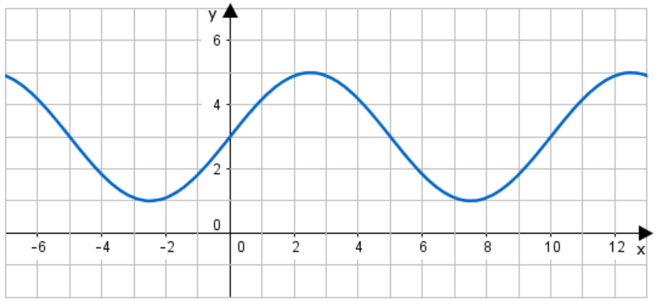
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto p + q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit $p,\ q,\ r \in \mathbb{N}$.



Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Geben Sie p, q und r an.

Teilaufgabe Teil A 3b (1 BE)

Der Graph der Funktion h geht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um zwei Einheiten in positive x-Richtung hervor. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an.

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x} - 1\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f sowie die einzige Nullstelle $x = \ln 2$ von f.

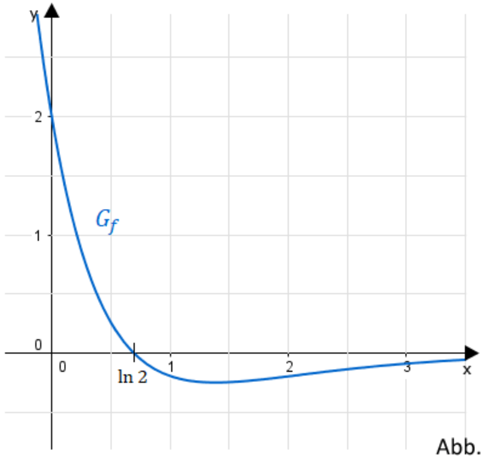


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion f' von f gilt: $f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Extrempunkts: $\ln 4$)

Zusätzlich ist die Funktion F mit $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie anhand des Terms von F, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Der Graph von F verläuft durch den Punkt $(\ln 2|0,5)$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F keine größeren Werte als $0,5$ annehmen kann und bei $x = \ln 4$ eine Wendestelle besitzt. Berechnen Sie die y-Koordinate des zugehörigen Wendepunkts.

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse sowie des Funktionswerts $F(0)$ im Bereich $-0,3 \leq x \leq 3,5$ in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, das durch das Dreieck mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(\ln 2|0)$ und $Q(0|2)$ angenähert werden kann. Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ vom Inhalt des Flächenstücks abweicht.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion F_0 mit $F_0(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$ und $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil B 1g (4 BE)

Begründen Sie, dass F_0 mit der betrachteten Stammfunktion F von f übereinstimmt. Interpretieren Sie geometrisch den Wert $F_0(2) \approx 0,234$ mithilfe von in Abbildung 1 geeignet zu markierenden Flächenstücken.

Teilaufgabe Teil B 1h (2 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die eine Stammfunktion, aber keine Integralfunktion von f ist.

Zur Modellierung einer Zerfallsreihe wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich in einem Gefäß zu Beginn eines Beobachtungszeitraums ausschließlich der radioaktive Stoff Bi211 befindet. Jeder Atomkern dieses Stoffs Bi211 wandelt sich irgendwann in einen Kern des radioaktiven Stoffs Tl207 um und dieser wiederum irgendwann in einen Kern des Stoffs Pb207. Abbildung 2 zeigt diese Zerfallsreihe schematisch.

Abb. 2

Der zeitliche Verlauf des Bi 211-Anteils, des Tl207-Anteils und des Pb207-Anteils der Kerne im Gefäß lässt sich durch die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen B, F bzw. P beschreiben, deren Terme der folgenden Tabelle zu entnehmen sind. Dabei ist F die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion.

Bi 211	Tl 207	Pb 207
$B(x) = e^{-2x}$	$F(x)$	$P(x) = 1 - B(x) - F(x)$

Für jede der drei Funktionen bezeichnet $x \geq 0$ die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in der Einheit 6 Minuten. Beispielsweise bedeutet $P(1) \approx 0,400$, dass sechs Minuten nach Beginn der Beobachtung etwa 40,0% aller Kerne im Gefäß Pb207-Kerne sind.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Bestimmen Sie jeweils auf zehntel Prozent genau die Anteile der drei Kernsorten zwölf Minuten nach Beobachtungsbeginn.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung von Ergebnissen aus Aufgabe 1 den Zeitpunkt auf Sekunden genau, zu dem der Anteil von Tl 207-Kernen im Gefäß am größten ist.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Begründen Sie rechnerisch, dass zu keinem Zeitpunkt die Anteile der drei Kernsorten gleich groß sind.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Weisen Sie mithilfe des Terms der Funktion P nach, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 1$ gilt, und interpretieren Sie diesen Grenzwert im Sachzusammenhang.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$$f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$$

> Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*
>
> $f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x-1$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$\Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der y-Achse:

> Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*
>
> Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

$$f(0) = \frac{(3+0)^2}{0-1} = -9 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|-9)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$\frac{(3+x)^2}{x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3+x)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad S_x(-3|0)$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x + 7 + \dfrac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung $y = x + 7$ für G_f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Termumformung

$$f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$$

$$\begin{aligned} x + 7 + \tfrac{16}{x-1} &= \tfrac{(x+7)\cdot(x-1)+16}{x-1} \\ &= \tfrac{x^2-x+7x-7+16}{x-1} \\ &= \tfrac{x^2+6x+9}{x-1} \\ &= \tfrac{(3+x)^2}{x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$y = x + 7$ ist die Gleichung der schrägen Asymptote von G_f

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Nullstellen einer Funktion

Nullstellen bestimmen: $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \qquad | +1$

$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1 \qquad | \cdot \frac{1}{2}$

$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \qquad | \ln$

$\ln e^{\frac{1}{2}x} = \ln \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = \ln \frac{1}{2}$

$x = 2 \ln \frac{1}{2}$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Tangentengleichung ermitteln

$f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = \frac{1}{2}x$.

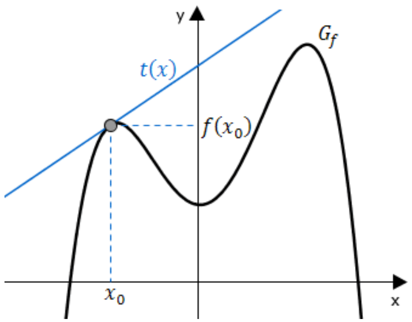
$f'(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}$

Tangentengleichung:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = 0$.

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$y = e^0 \cdot x + 1 = x + 1$

Achsenabschnitte:

Erläuterung: *Rechenweg*

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$y = 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

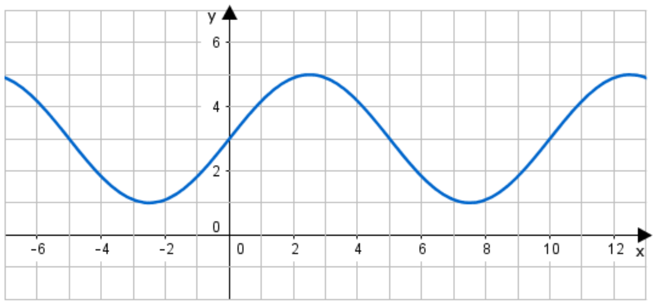
$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad S_x(-1|0)$

Zwei Dreiecksseiten haben somit die gleiche Länge (1).

$S_x(-1|0)$; $S_y(0|1) \quad \Rightarrow \quad \triangle$ ist gleichschenklig

Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto p + q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit p, q, $r \in \mathbb{N}$.



Geben Sie p, q und r an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Funktionsgleichung ermitteln

Am Graphen erkennt man:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Der Graph von g schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 3$ und hat Funktionswerte von -1 bis 5.

Der Graph von g entsteht also durch Verschiebung des Graphen einer Sinusfunktion in postiver y-Richtung um 3 Einheiten.

$\Rightarrow \quad p = 3$

$p = 3$

Erläuterung: *Amplitude*

Der Faktor q gibt die Amplitude der Sinusfunktion wieder.

Der Graph von g hat Funktionswerte von 1 bis 5. Somit ist die Amplitude von g gleich 2.

$q = 2$

Erläuterung: *Periode der Sinusfunktion*

Die Periode T einer Sinusfunktion $sin(bx + c)$ ist gegeben durch:

$T = \dfrac{2\pi}{b}$

An der Abbildung ließt man ab, dass die Periode der Funktion g gleich 10 ist.

$10 = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{r}} = 2r \quad \Rightarrow \quad r = 5$

$r = 5$

Teilaufgabe Teil A 3b (1 BE)

Der Graph der Funktion h geht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um zwei Einheiten in positive x-Richtung hervor. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Verschiebung von Funktionsgraphen

$g(x) = 3 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$

$h(x) = g(x-2) = 3 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}(x-2)\right)$

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate

$n(t) = 3t^2 - 60t + 500$

> Erläuterung: *Mittlere Änderungsrate*
>
> Die mittlere Änderungsrate bezeichnet die durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten auf dem Graphen einer Funktion.
>
> Stichwort: Differenzenquotient

$\frac{n(2) - n(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 120 + 500 - 500}{2} = -54$

Mittlere Änderungsrate: $-54\frac{1}{h}$

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$n(t) = 3t^2 - 60t + 500$

> Erläuterung: *Momentane Änderungsrate*
>
> Die momentane Änderungsrate einer Funktion ist nichts anderes als die Steigung der Funktion.

$n'(t) = 6t - 60$

$-30 = 6t - 60$

$0 = 6t - 30$

$6t = 30$

$t = 5$

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x} - 1\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f sowie die einzige Nullstelle $x = \ln 2$ von f.

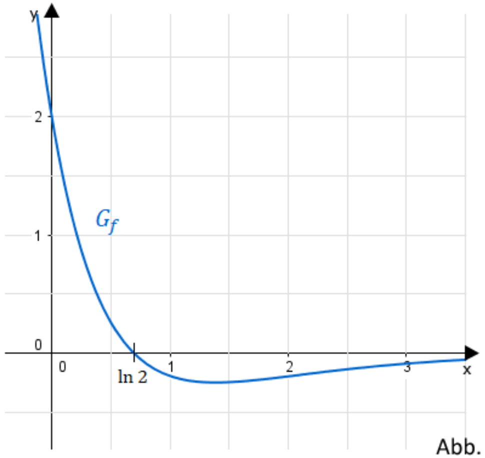


Abb. 1

Zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion f' von f gilt: $f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a]

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f(x) = 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x} - 1\right) \qquad$ (ausmultiplizieren)

$f(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel für Exponentialfunktionen:
>
> $f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$f'(x) = 4e^{-2x} \cdot (-2) - 2e^{-x} \cdot (-1)$

$f'(x) = -8e^{-2x} + 2e^{-x} \qquad | \; 2e^{-x}$ ausklammern

$f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$

Alternative Lösung

Altenativer Rechenweg (Ableitung mit Produktregel):

$f'(x) = 2e^{-x} \cdot (-1) \cdot \left(2e^{-x} - 1\right) + 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x}\right) \cdot (-1)$

$f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(-2e^{-x} + 1 - 2e^{-x}\right)$

$f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Extrempunkts: $\ln 4$)

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b]

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x} - 1\right)$

$f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

$\underbrace{2e^{-x}}_{>0} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right) = 0$

$1 - 4e^{-x} = 0$

$1 = 4e^{-x} \qquad \cdot \, |e^{x}$

$e^{x} = 4 \qquad | \ln$

$x^E = \ln 4$

Lage des möglichen Extrempunkts:

$$y^E = f(\ln 4) = 2e^{-\ln 4} \cdot \left(2e^{-\ln 4} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad E\left(\ln 4 | -\frac{1}{4}\right)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

$f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right) = 2e^{-x} - 8e^{-2x}$

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$f''(x) = 2e^{-x} \cdot (-1) - 8e^{-2x} \cdot (-2)$

$f''(x) = -2e^{-x} + 16e^{-2x}$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der möglichen Extremstelle untersuchen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$$f''(\ln 4) = -2e^{-\ln 4} + 16e^{-2\ln 4} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad E\left(\ln 4 | -\frac{1}{4}\right) \quad \text{Tiefpunkt}$$

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Zusätzlich ist die Funktion F mit $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie anhand des Terms von F, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Stammfunktion

$F(X) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = 2e^{-x} \cdot (-1) - 2e^{-2x} \cdot (-2) = 2e^{-x} \cdot \left(-1 + 2e^{-x}\right) = f(x)$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\quad F' = f$

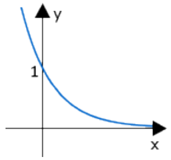
$\Rightarrow \quad F$ ist Stammfunktion von f

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\underbrace{2e^{-x}}_{\to 0} - \underbrace{2e^{-2x}}_{\to 0}\right) = 0$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

Die Exponentialfunktionen e^{-2x} und e^{-x} nähern sich der x-Achse für $x \to +\infty$.



Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Der Graph von F verläuft durch den Punkt $(\ln 2|0,5)$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F keine größeren Werte als $0,5$ annehmen kann und bei $x = \ln 4$ eine Wendestelle besitzt. Berechnen Sie die y-Koordinate des zugehörigen Wendepunkts.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Eigenschaften der Integralfunktion

Die Extremstelle der Funktion F ist die Nullstelle der Funktion f, also $x = \ln 2$.

Vorzeichenwechsel von + auf - an der Stelle $x = \ln 2$ (s. Abbildung 1)
$\Rightarrow$ An der Stelle $x = \ln 2$ liegt ein Hochpunkt vor.
$\Rightarrow$ Der maximale y-Werte von F ist somit $0,5$.

Die Wendestelle der Funktion F ist die Extremstelle der Funktion f, also $x = \ln 4$.

$$F(\ln 4) = 2e^{-\ln 4} - 2e^{-2\ln 4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse sowie

des Funktionswerts $F(0)$ im Bereich $-0,3 \leq x \leq 3,5$ in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Skizze

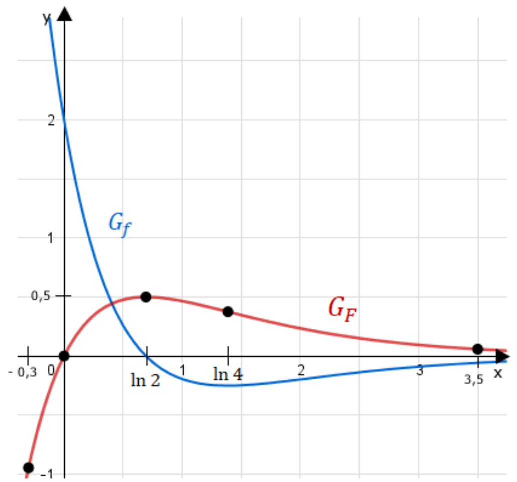
$F(-0,3) \approx -0,94$

$F(0) = 0$

$F(\ln 2) = 0,5$

$F(\ln 4) = \frac{3}{8} = 0,375$

$F(3,5) \approx 0,06$

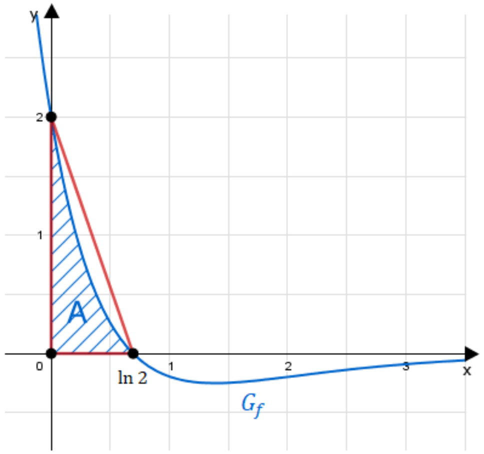


Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, das durch das Dreieck mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(\ln 2|0)$ und $Q(0|2)$ angenähert werden kann. Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ vom Inhalt des Flächenstücks abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Flächenberechnung



Flächeninhalt Dreieck:

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 = \ln 2$$

Flächeninhalt A:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Die Fläche die G_f mit den Koordinatenachsen einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_0^{\ln 2} f(x)\ \mathrm{dx}$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \int_0^{\ln 2} f(x)\ \mathrm{dx} = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$$

Prozentualer Unterschied:

$$\frac{A_\triangle}{A} = \frac{\ln 2}{0{,}5} \approx 1{,}386 \qquad \Rightarrow \qquad A_\triangle \text{ ist um ca. } 38{,}6\% \text{ größer als } A$$

Teilaufgabe Teil B 1g (4 BE)

Betrachtet wird nun die Integralfunktion F_0 mit $F_0(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{dt}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie, dass F_0 mit der betrachteten Stammfunktion F von f übereinstimmt. Interpretieren Sie geometrisch den Wert $F_0(2) \approx 0{,}234$ mithilfe von in Abbildung 1 geeignet zu markierenden Flächenstücken.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1g

Eigenschaften der Integralfunktion

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{dt}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

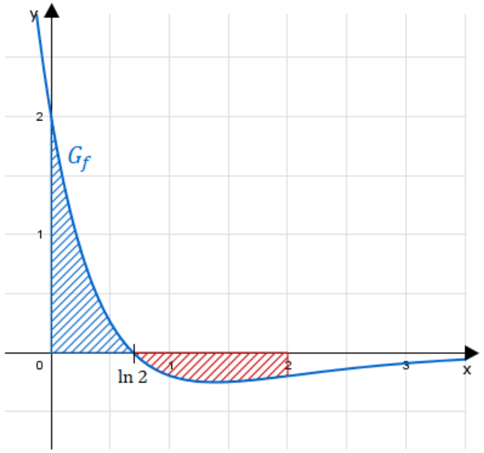
$F_0(x) = [F(t)]_0^x = F(x) - F(0) = F(x)$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

$$F_0(2) = \int_0^2 f(t)\ \mathrm{dt}$$

Das bestimmte Integral $F_0(2) = \int_0^2 f(t)\ \mathrm{dt}$ entspricht der Differenz der zwei Flächen die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 2 einschließt.

Die Fläche oberhalb der x-Achse ist positiv.
Die Fläche unterhalb der x-Achse ist negativ.



Das Flächenstück oberhalb der x-Achse ist um $0{,}234$ größer als das Flächenstück unterhalb der x-Achse.

Teilaufgabe Teil B 1h (2 BE)

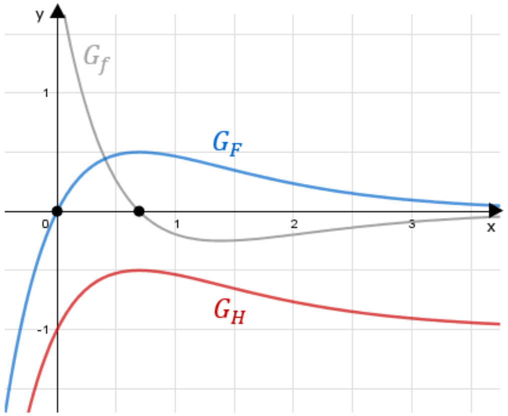
Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die eine Stammfunktion, aber keine Integralfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1h

Stammfunktion

z.B.: $H(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - 1$

Erläuterung:



Verschiebt man den Graphen von F so, dass dieser keine Nullstellen mehr hat (hier durch -1), so kann die neue Funktion keine Integralfunktion mehr sein, denn eine Integralfunktion hat stets eine Nullstelle.

H ist trotzdem Stammfunktion von f, denn $H' = f$:

$H(x) = F(x) - 1$

$H'(x) = F'(x) = f(x)$

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Zur Modellierung einer Zerfallsreihe wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich in einem Gefäß zu Beginn eines Beobachtungszeitraums ausschließlich der radioaktive Stoff Bi211 befindet. Jeder Atomkern dieses Stoffs Bi211 wandelt sich irgendwann in einen Kern des radioaktiven Stoffs Tl207 um und dieser wiederum irgendwann in einen Kern des Stoffs Pb207. Abbildung 2 zeigt diese Zerfallsreihe schematisch.

Abb. 2

Der zeitliche Verlauf des Bi 211-Anteils, des Tl207-Anteils und des Pb207-Anteils der Kerne im Gefäß lässt sich durch die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen B, F bzw. P beschreiben, deren Terme der folgenden Tabelle zu entnehmen sind. Dabei ist F die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion.

Bi 211	Tl 207	Pb 207
$B(x) = e^{-2x}$	$F(x)$	$P(x) = 1 - B(x) - F(x)$

Für jede der drei Funktionen bezeichnet $x \geq 0$ die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in der Einheit 6 Minuten. Beispielsweise bedeutet $P(1) \approx 0,400$, dass sechs Minuten nach Beginn der Beobachtung etwa 40,0% aller Kerne im Gefäß Pb207-Kerne sind.

Bestimmen Sie jeweils auf zehntel Prozent genau die Anteile der drei Kernsorten zwölf Minuten nach Beobachtungsbeginn.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionswert berechnen

$x = 2$ (entspricht 12 Minuten)

$B(2) = e^{-4} = 1,8\%$

$F(2) = 23,4\%$

$P(2) = 74,8\%$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung von Ergebnissen aus Aufgabe 1 den Zeitpunkt auf Sekunden genau, zu dem der Anteil von Tl 207-Kernen im Gefäß am größten ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Anwendungszusammenhang

$x = \ln 2$ (s. Teilaufgabe Teil B 1e)

$\ln 2 \cdot \underbrace{6}_{\text{min}} \cdot \underbrace{60}_{\text{sek}} = 250 \text{ s}$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Begründen Sie rechnerisch, dass zu keinem Zeitpunkt die Anteile der drei Kernsorten gleich groß sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Schnittpunkt zweier Funktionen

Funktion B und F schneiden: $B(x) = F(x)$

$e^{-2x} = 2e^{-x} - 2e^{-2x} \qquad | -e^{-2x}$

$0 = 2e^{-x} - 3e^{-2x} \qquad | \; e^{-x}$ ausklammern

$0 = \underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot \left(2 - 3e^{-x}\right)$

$0 = 2 - 3e^{-x}$

$3e^{-x} = 2$

$e^{-x} = \dfrac{2}{3} \qquad | \ln$

$-x = \ln \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -\ln \dfrac{2}{3}$

$F\left(-\ln \dfrac{2}{3}\right) = B\left(-\ln \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$

Überprüfen, ob P den gleichen Wert an der Schnittstelle annimmt:

$P\left(-\ln \dfrac{2}{3}\right) = 1 - \dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow$ zu keinem Zeitpunkt sind die Anteile der drei Kernsorten gleich groß

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Weisen Sie mithilfe des Terms der Funktion P nach, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 1$ gilt, und interpretieren Sie diesen Grenzwert im Sachzusammenhang.

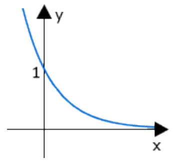
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Grenzwert bestimmen

$P(x) = 1 - e^{-2x} - 2e^{-x} + 2e^{-2x}$

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

Der Graph der Exponentialfunktion e^{-2x} bzw. e^{-x} nähert sich der x-Achse für immer größer werdende x-Werte.



$\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0} - \underbrace{2e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{2e^{-2x}}_{\to 0}\right) = 1$

Nach sehr langer Zeit sind nur noch Pb 207-Kerne im Gefäß.