Abitur 2017 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\int_0^2 g(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

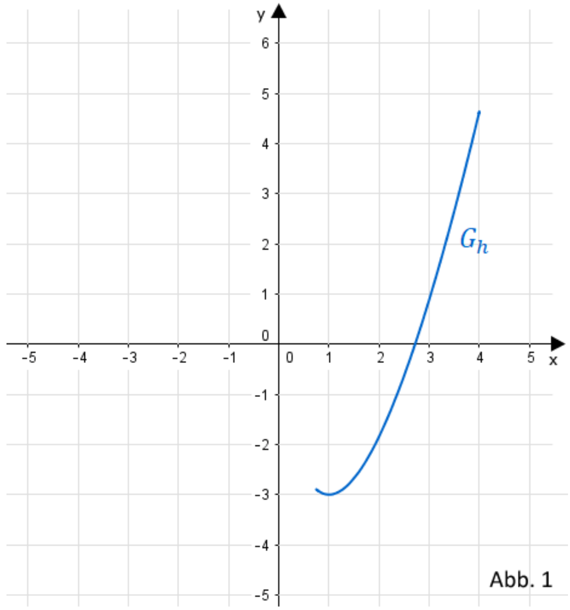
Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0,75 \le x \le 4$.



Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e|0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0,75$ in Abbildung 1 ein.

Die Funktion $h^* : x \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)

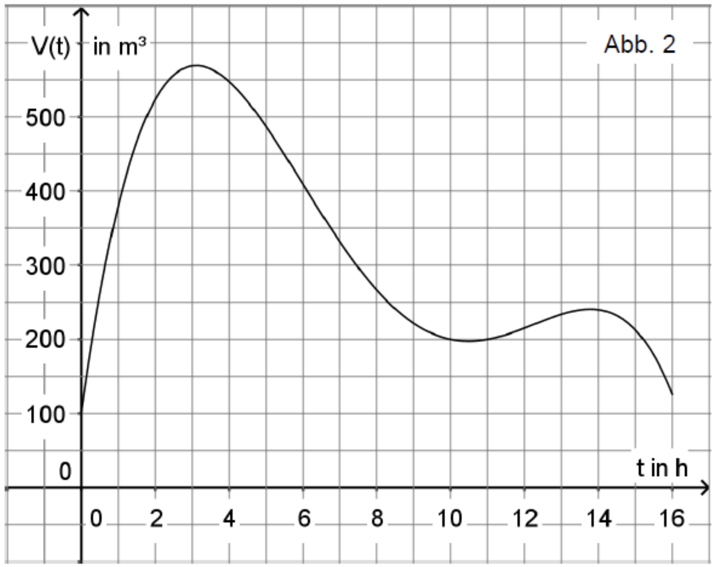
Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Schraffieren Sie in Abbildung 1 ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int_e^{x_S} (x - h^*(x))$ dx entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $[0; 16]$ definierten Funktion $V : t \mapsto V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $V(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Erläutern Sie, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0;10]$ die Beziehung $V(t+6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheiden Sie mithilfe von Abbildung 2, ob für $t = 5$ diese Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : t \mapsto 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in $\frac{m^3}{h}$.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7,5$ positiv und für $7,5 < t < 12$ negativ sind.

Teilaufgabe Teil B 2e (6 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int\limits_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn 150 m^3 Wasser im Becken waren. Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$g(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $4 + x$, muss größer oder gleich Null sein.

$4 + x \geq 0$

$x \geq -4$

$\Rightarrow \quad D_g = [-4; +\infty[$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

$g(0) = 2 \cdot \sqrt{4} - 1 = 3$

$\Rightarrow \quad S_y(0|3)$

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Verschiebung von Funktionsgraphen

1. Verschiebung von G_w um 4 Einheiten in negativer x-Richtung.

$\Rightarrow \quad \sqrt{x} \to \sqrt{x+4}$

2. Streckung um dem Faktor 2 in y-Richtung

$\Rightarrow \quad \sqrt{x+4} \to 2 \cdot \sqrt{x+4}$

3. Verschiebung entlang um 1 Einheit in negativer y-Richtung.

$\Rightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{x+4} \to 2 \cdot \sqrt{x+4} - 1$

Wertebereich bestimmen

$\lim\limits_{x \to -4} g(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

$\Rightarrow \quad W_g = [-1; \infty[$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Nullstellen einer Funktion

Nullstellen bestimmen: $f(x) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \qquad | +1$

$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1 \qquad | \cdot \frac{1}{2}$

$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \qquad | \ln$

$\ln e^{\frac{1}{2}x} = \ln \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = \ln \frac{1}{2}$

$x = 2 \ln \frac{1}{2}$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Tangentengleichung ermitteln

$f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

Erste Ableitung bilden: $f'(x)$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = \frac{1}{2}x$.

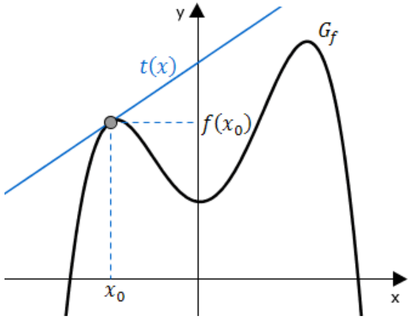
$f'(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}$

Tangentengleichung:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = 0$.

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$y = e^0 \cdot x + 1 = x + 1$

Achsenabschnitte:

Erläuterung: *Rechenweg*

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$y = 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad S_x(-1|0)$

Zwei Dreiecksseiten haben somit die gleiche Länge (1).

$S_x(-1|0)\ ;\ S_y(0|1) \quad \Rightarrow \quad \triangle$ ist gleichschenklig

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Funktionsgleichung ermitteln

z.B. $\quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Erläuterung:

Überlegungen:

1. Funktion mit Achsensymmtrie zu y-Achse:

$$f(x) = x^2$$

2. Funktion mit Achsensymmtrie zu y-Achse und besitzt eine Polstelle (senkrechte Asymptote):

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x = 0 \text{ senkrechte Asymptote}$$

2. Funktion mit Achsensymmtrie zu y-Achse und besitzt eine Pol an der Stelle $x = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \quad ; \quad x = 2 \text{ Asymptote } (2^2 - 4 = 0)$$

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\int\limits_0^2 g(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

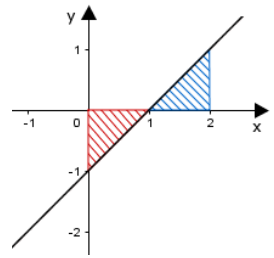
Eigenschaften einer Funktion

z.B. $\quad g(x) = x - 1$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_g mit der x-Achse zwischen 0 und 2 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral $\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{dx}$.

Wenn der Wert des Integrals 0 ist, dann bedeutet es, dass es zwei Flächen gibt, eine unterhalb (negativ) und eine oberhalb (positiv) der x-Achse, die betragsmäßig gleich groß sind und sich gegenseitig aufheben (Summe gleich Null).



Die Gerade (und somit nicht konstante Funktion) $x - 1$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 1$ und hat Steigung 1. Die Fläche die die Gerade mit der x-Achse zwischen 0 und 1 einschließt liegt unterhalb der x-Achse und ist betragsmäßig genauso groß, wie die Fläche die die Gerade mit der x-Achse zwischen 1 und 2 einschließt.

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate

$n(t) = 3t^2 - 60t + 500$

Erläuterung: *Mittlere Änderungsrate*

Die mittlere Änderungsrate bezeichnet die durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten auf dem Graphen einer Funktion.

Stichwort: Differenzenquotient

$$\frac{n(2) - n(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 120 + 500 - 500}{2} = -54$$

Mittlere Änderungsrate: $-54\frac{1}{h}$

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$n(t) = 3t^2 - 60t + 500$

Erläuterung: *Momentane Änderungsrate*

Die momentane Änderungsrate einer Funktion ist nichts anderes als die Steigung der Funktion.

$n'(t) = 6t - 60$

$-30 = 6t - 60$

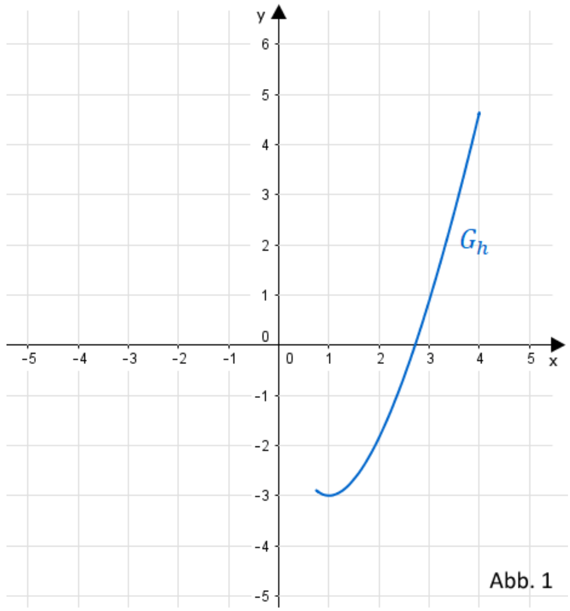
$0 = 6t - 30$

$6t = 30$

$t = 5$

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0,75 \leq x \leq 4$.



Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e|0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

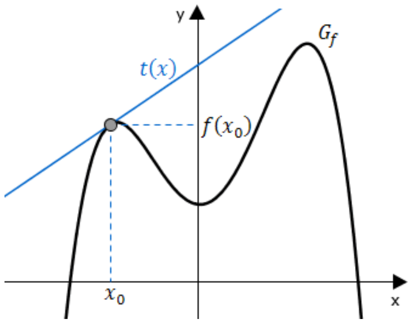
Tangentengleichung ermitteln

Tangentengleichung t im Punkt $(e|0)$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = e$.

$t : y = (x - x_0) \cdot h'(x_0) + h(x_0)$

$t : y = (x - e) \cdot h'(e) + h(e)$

Nebenrechnungen:

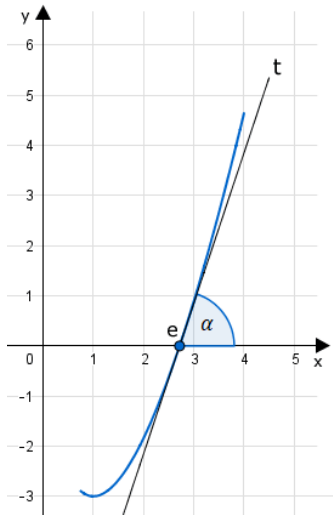
$h(e) = 3e \cdot (-1 + \underbrace{\ln e}_{1}) = 0$

$h'(x) = 3 \cdot (-1 + \ln x) + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3 \ln x$

$h'(e) = 3 \ln e = 3$

$\Rightarrow \quad t : y = 3 \cdot (x - e)$

Winkel bestimmen



Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.

Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α, welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.

$f'(x_0) = \tan \alpha$

$\tan \alpha = h'(e)$

$\alpha = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6^\circ$

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

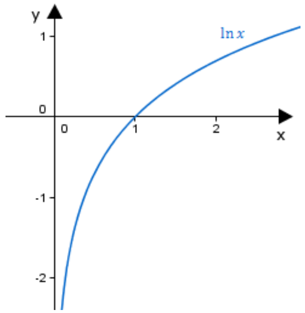
Monotonieverhalten einer Funktion

$h(x) = 3x \cdot (-1 + \ln x) \qquad \text{mit } D_h = \mathbb{R}^+$

Vorzeichen der ersten Ableitung $h'(x) = 3 \cdot \ln x$ untersuchen:

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Graph der ln-Funktion:



$h'(x) < 0 \qquad \text{für} \qquad x \in]0,1[$

$h'(x) > 0 \qquad \text{für} \qquad x > 1$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton fallend.

In diesem Fall wird 0 ausgeschlossen, da dieser Wert nicht im Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}^+$ liegt.

$\Rightarrow \quad h(x)$ ist für $x \in]0;1]$ streng monoton fallend

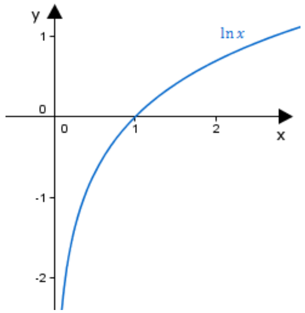
$\Rightarrow \quad h(x)$ ist für $x \in [1;+\infty[$ streng monoton steigend

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{3x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(-1 + \ln x)}_{\to +\infty} = +\infty$$

Erläuterung: *Wertebereich der Logarithmusfunktion*

Graph der ln-Funktion:



Am Graphen der ln-Funktion lassen sich die Grenzwerte ablesen.

Wertebereich bestimmen

$h(1) = -3$

Aus dem Monotonieverhalten von G_h geht hervor, dass bei $(1|-3)$ ein Minimum vorliegt.

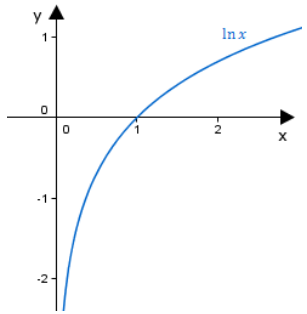
$\Rightarrow \quad W_h = [-3, +\infty[$

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0{,}75$ in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Grenzwert bestimmen



$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{3x}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{(-1 + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty})}_{\to -\infty}$$

Erläuterung: *Grenzwert*

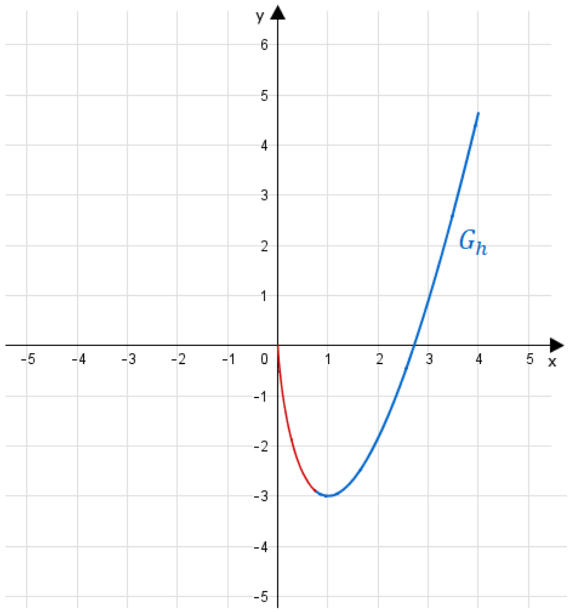
Aus der Merkhilfe für Mathematik:

$$\lim_{x\to 0} (x^r \cdot \ln x) = 0 \qquad (\text{für } r > 0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{-3x}_{\to 0} + \underbrace{3x \ln x}_{\to 0} = 0 \qquad (\text{s. Merkehilfe Mathematik})$$

$$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} 3 \ln x = -\infty$$

Skizze



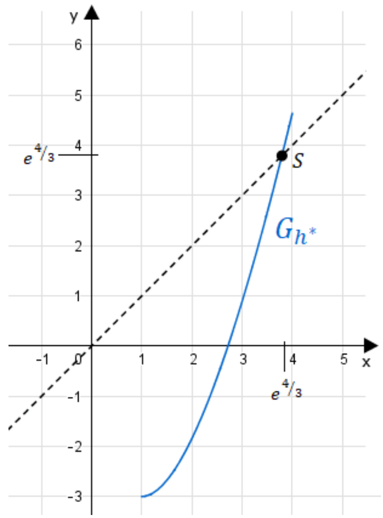
Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Die Funktion $h^* : x \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Umkehrfunktion bestimmen



Erläuterung: *Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion*

Die Regel lautet:

Der Definitionsbereich der Funktion wird der Wertebereich der Umkehrfunktion und der Wertebereich der Funktion wird der Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

$D_{h^*} = [1; +\infty[\quad \Rightarrow \quad W_{h^{*-1}} = [1; +\infty[$

$h^*(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad W_{h^*} = [-3; +\infty[\quad \Rightarrow \quad D_{h^{*-1}} = [-3; +\infty[$

Schnittpunkt zweier Funktionen

$h^*(x) = x$

Erläuterung:

Die Teilung der Gelchung durch x ist in diesem Fall erlaubt, da x nicht den Wert Null annehmen kann ($x \in D_{h^*}$).

$3x \cdot (-1 + \ln x) = x \qquad | : x$

$-3 + 3\ln x = 1$

$3 \ln x = 4$

$\ln x = \frac{4}{3} \qquad | e^x$

$\Rightarrow \qquad x_S = e^{\frac{4}{3}}$

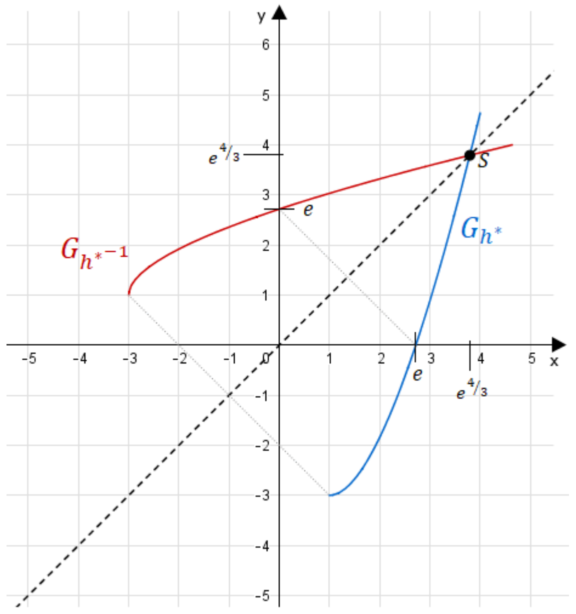
$\Rightarrow \qquad S\left(e^{\frac{4}{3}} | e^{\frac{4}{3}}\right)$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in Abbildung 1 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Skizze



Erläuterung: *Graph der Umkehrfunktion*

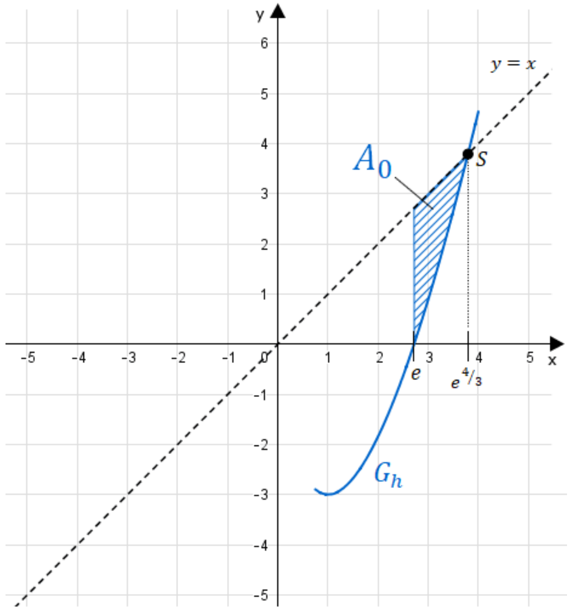
Den Graphen der Umkehrfunktion $h^{*^{-1}}$ erhält man durch Spiegelung des Graphen der Funktion h^* an der Geraden $y = x$.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

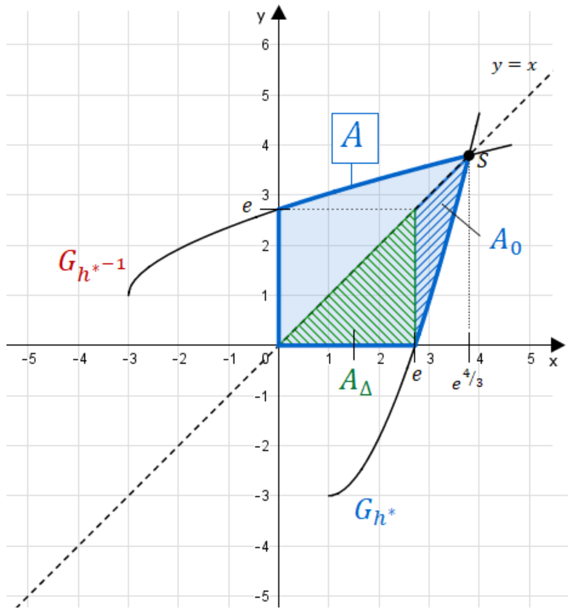
Schraffieren Sie in Abbildung 1 ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int_e^{x_S} (x - h^*(x))\ dx$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1f

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



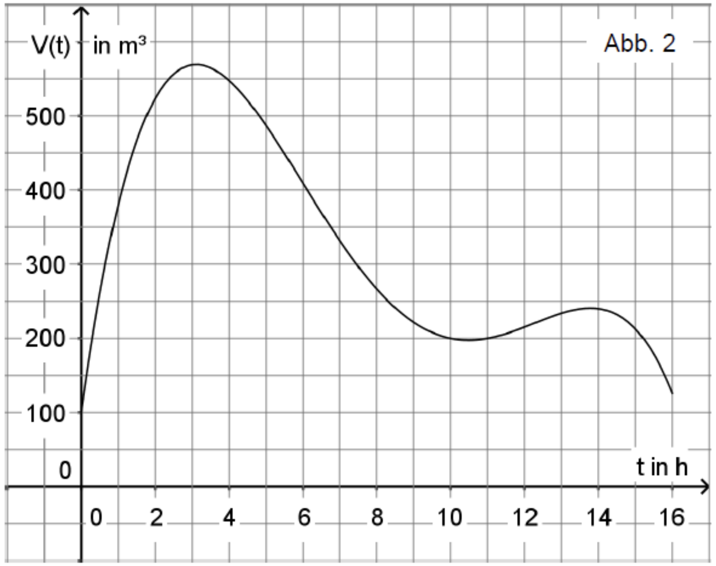
Flächenberechnung



$$A = 2 \cdot \left(A_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e \cdot e}_{A_\triangle} \right) = 2A_0 + e^2$$

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

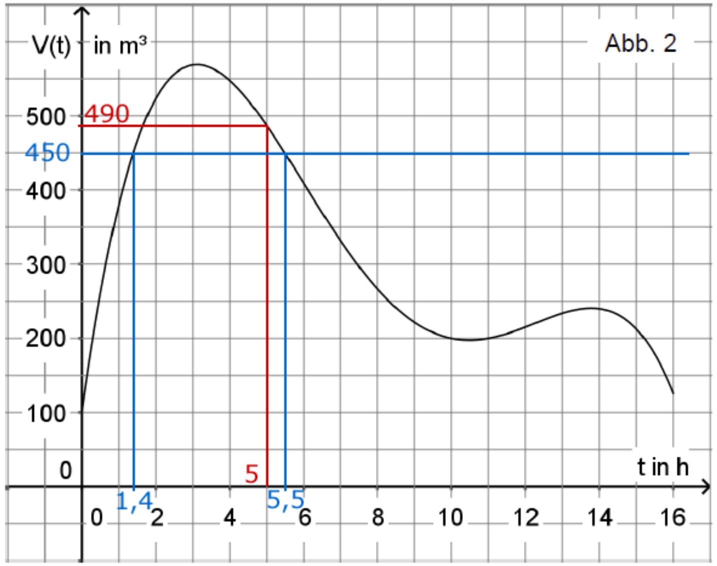
Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $[0;16]$ definierten Funktion $V : t \mapsto V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $V(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Funktionswert berechnen



$V(5) \approx 490 \text{ m}^3$

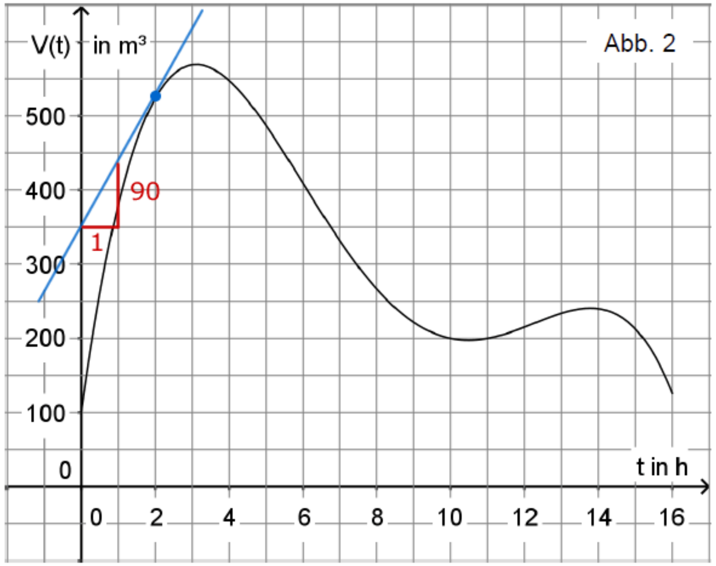
Zeitraum: von etwa 1,4 Stunden bis etwa 5,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Steigung eines Funktionsgraphen



Erläuterung: *Momentane Änderungsrate, Tangentensteigung*

Die momentane Änderungsrate einer Funktion ist nichts anderes als die Steigung der Funktion.

Am Graphen wird eine Tangente an der Stelle $x = 2$ gelegt und über ein Steigungsdreieck die Steigung der Tangente und somit der Funktion bestimmt.

$$V'(2) \approx \frac{90}{1} = 90\frac{m^3}{h}$$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Erläutern Sie, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0; 10]$ die Beziehung $V(t+6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheiden Sie mithilfe von Abbildung 2, ob für $t = 5$ diese Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Anwendungszusammenhang

Sechs Stunden nach dem Zeitpunkt t ist das Volumen um 350 m^3 geringer als zum Zeitpunkt t.

$V(5) \approx 490$

$V(11) \approx 200$

$V(5) - V(11) = 290 < 350$

Für $t = 5$ trifft dies nicht zu, denn zwischen $t = 5$ und $t = 11$ nimmt das Volumen um weniger als 350 m^3 ab.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : t \mapsto 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in $\frac{m^3}{h}$.

Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7,5$ positiv und für $7,5 < t < 12$ negativ sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Nullstellen einer Funktion

$$g(t) = 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

In diesem Fall muss die Gleichung nach t aufgelöst werden.

Nullstellen bestimmen: $g(t) = 0$

$0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right) = 0$

$2t^3 - 39t^2 + 180t = 0$

$t \cdot (2t^2 - 39t + 180) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$\Rightarrow \quad t_1 = 0$

$2t^2 - 39t + 180 = 0$

$$t_{2,3} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 1440}}{4} = \frac{39 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{39 \pm 9}{4}$$

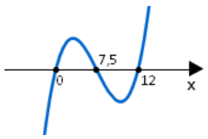
$\Rightarrow \quad t_2 = \dfrac{39 + 9}{4} = 12$

$\Rightarrow \quad t_3 = \dfrac{39 - 9}{4} = 7,5$

Skizze von $g(t)$:

Erläuterung: *Charakteristischer Verlauf ganzrationaler Funktionen*

Die Funktion $0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Leitkoeffizienten $0,4 \cdot 2$. Ihr charakteristischer Verlauf ist „von links unten nach rechts oben“.



$\Rightarrow \quad g(t) > 0$ für $0 < t < 7,5$
$\Rightarrow \quad g(t) < 0$ für $7,5 < t < 12$

Teilaufgabe Teil B 2e (6 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn 150 m^3 Wasser im Becken waren. Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate

Das Integral gibt die insgesamte Menge an Wasser, die zwischen den Zeitpunkten a und b ab- bzw. zugeflossen ist.

Bestimmtes Integral

$$\int_0^{7,5} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{7,5} 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)\ \mathrm{d}t$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $2t^3 - 39t^2 + 180t$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right) \, \mathrm{dt} = 2 \cdot \frac{t^{3+1}}{3+1} - 39 \cdot \frac{t^{2+1}}{2+1} + 180\frac{t^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{2}t^4 - 13t^3 + 90t^2$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\mathrm{dt} = \left[0,4 \cdot \left(\frac{1}{2}t^4 - 13t^3 + 90t^2\right)\right]_0^{7,5}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = [\, F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\mathrm{dt} = 0,4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (7,5)^4 - 13 \cdot (7,5)^3 + 90 \cdot (7,5)^2\right) - 0$$

$$\int_0^{7,5} g(t)\mathrm{dt} = 464,0625$$

Erläuterung:

Zu Beobachtungsbeginn gibt es 150 Kubikmeter Wasser im Becken.

$150 + 464,0625 = 614,0625 \approx 614 \text{ m}^3$

Die Wassermenge zu dem Zeitpunkt $t = 7,5h$ beträgt ungefähr 614 m^3

Begründung:

Bis 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn ändert sich das Volumen nur durch Zufluss, danach bis zum Ende des Beobachtungzeitraums nur durch Abfluss.