Abitur 2017 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die beiden bezüglich der $x_1 x_3$-Ebene symmetrisch liegenden Punkte $A(2|3|1)$ und $B(2|-3|1)$ sowie der Punkt $C(0|2|0)$.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass das Dreieck $A\,B\,C$ bei C rechtwinklig ist.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punkts D der x_2-Achse an, so dass das Dreieck $A\,B\,D$ bei D rechtwinklig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben ist die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

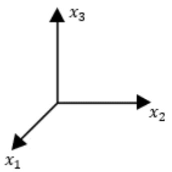
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die von der Zeltspitze ausgehenden Seitenkanten werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist 6 m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5 m. Das Zelt wird in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) modellhaft durch eine Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ mit der Spitze $S(2,5|2,5|6)$ dargestellt. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, C hat die Koordinaten $(5|5|0)$. Der Punkt B liegt auf der x_1-Achse, D auf der x_2-Achse. Das Dreieck $C\,D\,S$ liegt in der Ebene $E : 12x_2 + 5x_3 = 60$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Punkte B und D an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F, in der das Dreieck $D\,A\,S$ liegt, in Normalenform. (mögliches Ergebnis: $F : 12x_1 - 5x_3 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie die Größe dieses Winkels.

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

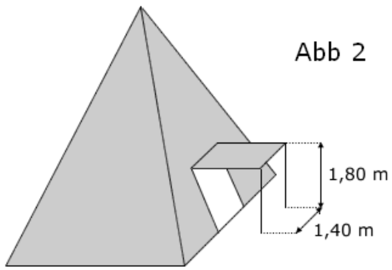
Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 50 cm hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell die Lichtquelle darstellt.

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Symmetrieachse g des Dreiecks $C\,D\,S$.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Ein Teil der Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck $C\,D\,S$ dargestellt wird, kann mithilfe zweier vertikal stehender Stangen der Länge $1,80$ m zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2). Die dadurch entstehende $1,40$ m breite Öffnung in der Zeltwand wird im Modell durch ein Rechteck dargestellt, das symmetrisch zu g liegt. Dabei liegt eine Seite dieses Rechtecks auf der Strecke $[C\,D]$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vordachs.



Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben sind die beiden bezüglich der $x_1\,x_3$-Ebene symmetrisch liegenden Punkte $A(2|3|1)$ und $B(2|-3|1)$ sowie der Punkt $C(0|2|0)$.

Weisen Sie nach, dass das Dreieck $A\,B\,C$ bei C rechtwinklig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Nachweis - rechtwinkliges Dreieck

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist gleich 0.

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 5 + 1 = 0$$

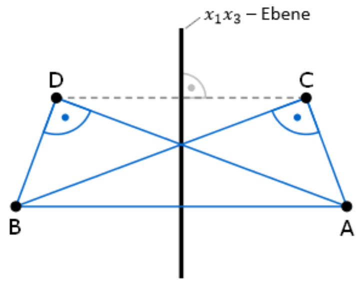
$\Rightarrow \quad \triangle A\,B\,C$ ist bei C rechtwinklig

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punkts D der x_2-Achse an, so dass das Dreieck $A\,B\,D$ bei D rechtwinklig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Nachweis - rechtwinkliges Dreieck



$D(0|-2|0)$

D ist der Spiegelpunkt von C bezüglich der $x_1\,x_3$-Ebene.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Spurpunkte einer Ebene

$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

x_1-Koordinatenachse: $\quad \overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_2-Koordinatenachse: $\quad \overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Spurpunkte einer Ebene*

Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Spurpunkte.
Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Koordinatenachse in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebene ein, löst nach dem Parameter λ auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

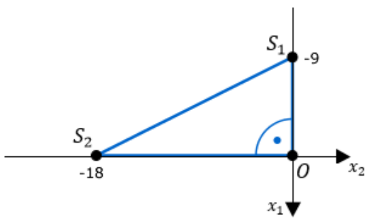
Spurpunkt S_1 mit der x_1-Koordinatenachse:

$$2\lambda + 0 + 0 = -18 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -9 \quad \Rightarrow \quad S_1(-9|0|0)$$

Spurpunkt S_2 mit der x_2-Koordinatenachse:

$$0 + \lambda + 0 = -18 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -18 \quad \Rightarrow \quad S_2(0|-18|0)$$

Flächeninhalt eines Dreiecks



$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Vektor bestimmen

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenvektor*

Ein Vektor der ein vielfaches von einem Normalenvektor einer Ebene ist, ist auch Normalenvektor der Ebene.

$$\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{n_E} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Wenn der Vektor $\overrightarrow{v}$ Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist, dann erfüllen seine Koordinaten auch die Ebenengleichung.

$$2 \cdot 2k + k - 2 \cdot (-2k) = -18$$

$$9k = -18$$

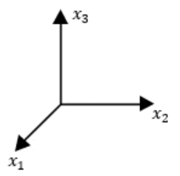
$$k = -2$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die von der Zeltspitze ausgehenden Seitenkanten werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist 6 m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5 m. Das Zelt wird in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) modellhaft durch eine Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ mit der Spitze $S(2,5|2,5|6)$ dargestellt. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, C hat die Koordinaten $(5|5|0)$. Der Punkt B liegt auf der x_1-Achse, D auf der x_2-Achse. Das Dreieck $C\,D\,S$ liegt in der Ebene $E: 12x_2 + 5x_3 = 60$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

© Abiturloesung.de



Geben Sie die Koordinaten der Punkte B und D an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Koordinaten von Punkten ermitteln

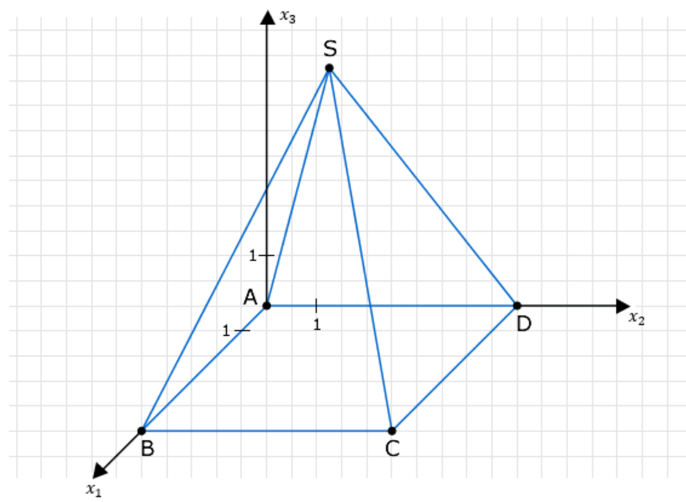
$C(5|5|0)$

Erläuterung:

Die Grundfläche der Pyramide ist quadratisch. Aus den Punktkoordinaten von C lassen sich die Koordinaten der Puntke B und D ableiten.

$\Rightarrow \quad B(5|0|0)$
$\Rightarrow \quad D(0|5|0)$

Skizze

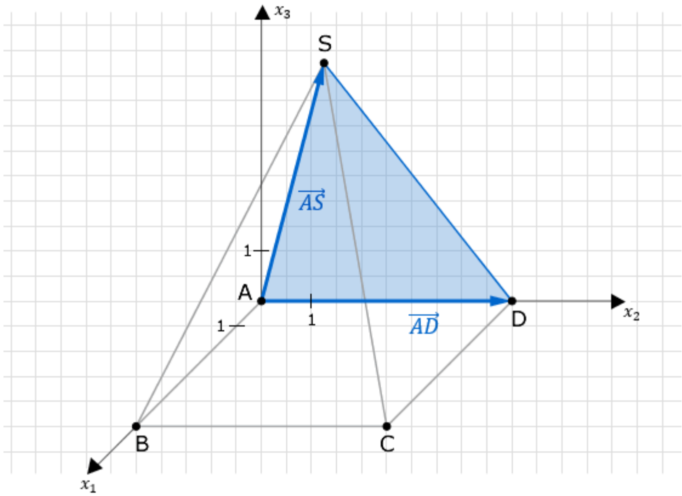


Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F, in der das Dreieck DAS liegt, in Normalenform.
(mögliches Ergebnis: $F: 12x_1 - 5x_3 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Ebene aus drei Punkte



Richtungsvektoren der Ebene F:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$A(0|0|0)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene F.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ der Ebene F bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 6 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 5 \cdot 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -12,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -12,5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{2}{5}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_F} = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -12,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$F: \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$F: 12x_1 - 5x_3 = 0$

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie die Größe dieses Winkels.

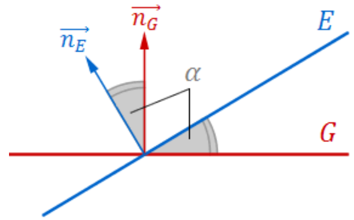
Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Winkel zwischen zwei Ebenen

Normalenvektor der Ebene E: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene F: $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Zeltwänden bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 - 25}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{169}} = \frac{-25}{169}$$

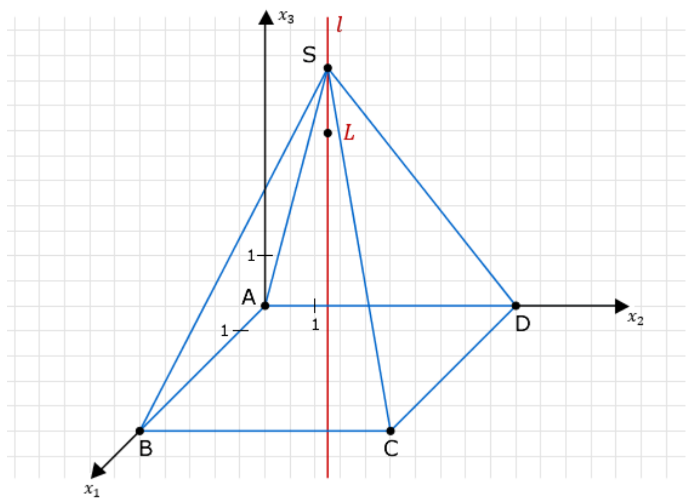
$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-25}{169}\right) \approx 98,5°$$

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 50 cm hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell die Lichtquelle darstellt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Geradengleichung aufstellen



Erläuterung: *Gerade Pyramide*

Die Pyramide $ABCDS$ ist eine gerade Pyramide, da alle Seitenkanten gleich lang sind (s. Teil B Teilaufgabe a) und die Spitze S senkrecht über den Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche liegt (Grundfläche ist ein Quadrat mit Seitenlänge 5 und die x_1 und x_2-Koordinate von S ist gleich 2,5).

Das Lot von S auf die Grundfläche verläuft somit durch den Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche.

Die Lichtquelle befindest sich somit auf dieser Lotgeraden.

Gerade l durch S parallel zur x_3-Achse aufstellen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn hier S als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{S}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden l.

$$l: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S}} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6+\lambda \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt - Ebene

$E: 12x_2 + 5x_3 - 60 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenvektor der Ebene}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{13}\,(12x_2 + 5x_3 - 60) = 0$$

Erläuterung: *Längeneinheit*

Der Abstand soll 50 cm betragen. Da eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität entspricht, muss der Abstand gleich 0,5 gesetzt werden.

Abstand Ebene zu Geradenpunkt gleich 0,5 setzen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P, E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

In diesem Fall wird der allgemeine Geradenpunkt $(2,5|2,5|6+\lambda)$ eingesetzt.

© Abiturloesung.de

$$\left|\frac{1}{13}\,(12\cdot 2,5 + 5\cdot(6+\lambda) - 60)\right| = 0,5$$

$$\left|\frac{1}{13}\,(30 + 30 + 5\lambda - 60)\right| = 0,5$$

$$\left|\frac{1}{13}\cdot 5\lambda\right| = 0,5$$

$$|\lambda| = 0,5\cdot 13\cdot\frac{1}{5} = 1,3$$

$$\lambda = \pm 1,3$$

Koordinaten der Lichtquelle bestimmen:

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Die Lichtquelle liegt innerhalb des Zeltes, deswegen kann nur der Wert $\lambda = -1,3$ richtig sein.

$$\overrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1,3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$L(2,5|2,5|4,7)$

Alternative Lösung

Abstand zur Ebene F:

$F: 12x_1 - 5x_3 = 0$

$$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{Normalenvektor der Ebene } F$$

$|\overrightarrow{n_F}| = 13$

Hesse-Normalenform F^{HNF} der Ebene aufstellen:

$$F^{\text{HNF}}: \frac{1}{13}\,(12x_1 - 5x_3) = 0$$

Abstand Ebene zu Geradenpunkt gleich 0,5 setzen:

$$\left|\frac{1}{13}\,(12\cdot 2,5 - 5\cdot(6+\lambda))\right| = 0,5$$

$$\left|\frac{1}{13}\,(30 - 30 - 5\lambda)\right| = 0,5$$

$$\left|-\frac{1}{13}\cdot 5\lambda\right| = 0,5$$

$$|-\lambda| = 0,5\cdot 13\cdot\frac{1}{5} = 1,3$$

$$\lambda = \pm 1,3$$

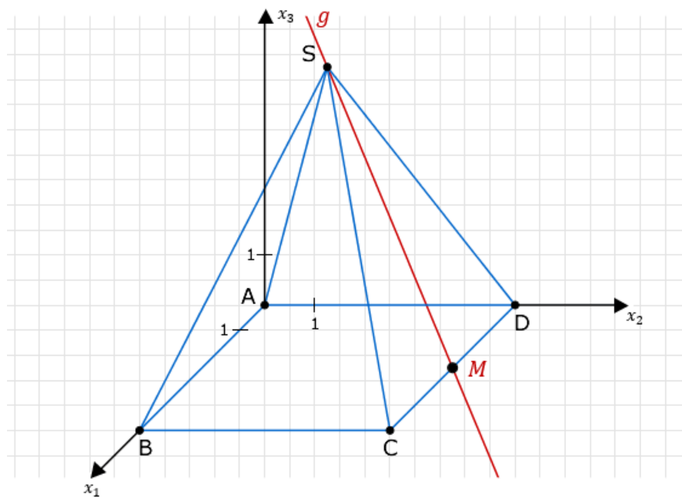
Koordinaten der Lichtquelle bestimmen, indem λ in die Geradengleichung eingesetzt wird (vgl. vorherige Lösung).

Teilaufgabe Teil B e (2 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Symmetrieachse g des Dreiecks $C\,D\,S$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Mittelpunkt einer Strecke



$D(0|5|0)$

$C(5|5|0)$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M}_{D,C} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{D} + \overrightarrow{C}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung aufstellen

Gerade durch $\overrightarrow{M}$ parallel zur Ebene $E: \overrightarrow{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n}_E} = 0$ aufstellen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn M als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{M}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

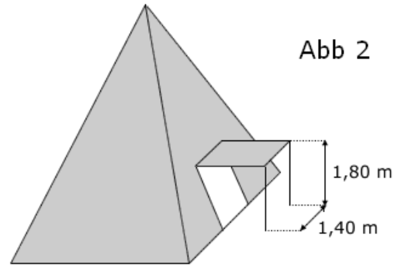
Als Ortsvektor wird ein Vektor genommen, der senkrecht zum Normalenvektor der Ebene verläuft. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss somit 0 ergeben.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 + 60 - 60 = 0$$

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

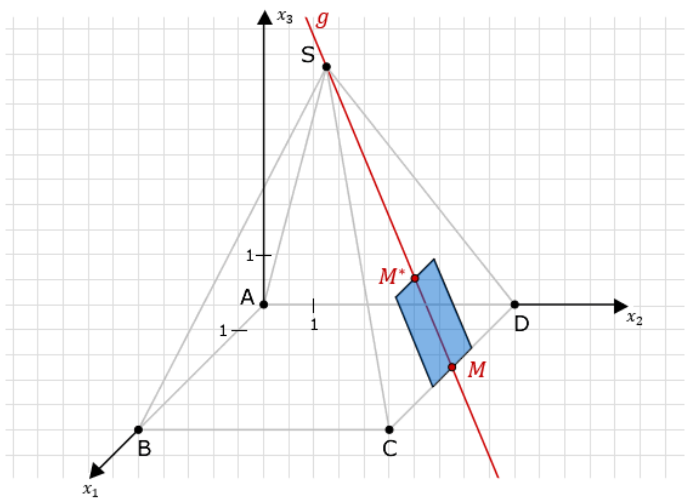
Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Ein Teil der Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck CDS dargestellt wird, kann mithilfe zweier vertikal stehender Stangen der Länge $1,80$ m zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2). Die dadurch entstehende $1,40$ m breite Öffnung in der Zeltwand wird im Modell durch ein Rechteck dargestellt, das symmetrisch zu g liegt. Dabei liegt eine Seite dieses Rechtecks auf der Strecke $[CD]$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vordachs.



Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Koordinaten von Punkten ermitteln



$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$ (s. Teilaufgabe Teil B e)

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5+5\lambda \\ -12\lambda \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Lage des Punktes*
>
> Der Punkt M^* liegt auf der Geraden g und hat nach Konstruktion einen Abstand von der horizontalen Ebene von 1,8 m.
>
> Seine x_3-Koordinate hat somit den Wert 1,8.

$-12\lambda = 1,8 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0,15$

$$\overrightarrow{M^*} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,15 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,25 \\ 1,8 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung:
>
> Die Strecke $[M\,M^*]$ entspricht der Höhe der Öffnung bzw. des Vordachs.

$$\overrightarrow{M\,M^*} = \overrightarrow{M^*} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,25 \\ 1,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \\ 1,8 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M\,M^*}\right| = \sqrt{(-0,75)^2 + 1,8^2}$$

$$A = 1,4 \cdot \sqrt{(-0,75)^2 + 1,8^2} \approx 2,73 \text{ m}^2$$