

## Abitur 2017 Mathematik Geometrie V

Gegeben sind die Punkte  $A(2|1|-4)$ ,  $B(6|1|-12)$  und  $C(0|1|0)$ .

### Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Punkt  $C$  auf der Geraden  $AB$ , nicht aber auf der Strecke  $[AB]$  liegt.

### Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Auf der Strecke  $[AB]$  gibt es einen Punkt  $D$ , der von  $B$  dreimal so weit entfernt ist wie von  $A$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $D$ .

Gegeben ist die Ebene  $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$ .

### Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Der Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x_1$ -Achse, der Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x_2$ -Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

### Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von  $E$  als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene  $E$  ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(0|0|1)$ ,  $B(2|6|1)$ ,  $C(-4|8|5)$  und  $D(-6|2|5)$  gegeben. Sie liegen in einer Ebene  $E$  und bilden ein Viereck  $ABCD$ , dessen Diagonalen sich im Punkt  $M$  schneiden.

### Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

Begründen Sie, dass die Gerade  $AB$  parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene verläuft.

### Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABCD$  ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $M$ .

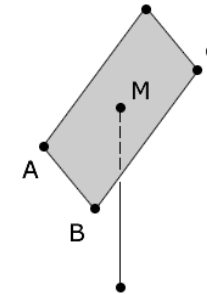
(Teilergebnis:  $M(-2|4|3)$ )

### Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  in Normalenform.

(mögliches Ergebnis:  $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ )

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck  $ABCD$  dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt  $M$  beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der  $x_1x_2$ -Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Realität.



### Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels  $\varphi$  des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen  $30^\circ$  und  $36^\circ$  liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

### Teilaufgabe Teil B e (5 BE)

Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene  $E$  verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt

des Schattens mithilfe des Terms  $|\vec{AB}| \cdot \frac{|\vec{AD}|}{\cos \varphi} \cdot (0,8 \text{ m})^2$  berechnet werden kann.

### Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels  $\varphi$  gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.

Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt  $A$  dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

## Lösung

## Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte  $A(2|1-4)$ ,  $B(6|1-12)$  und  $C(0|1|0)$ .

Weisen Sie nach, dass der Punkt  $C$  auf der Geraden  $AB$ , nicht aber auf der Strecke  $[AB]$  liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a**Geradengleichung aufstellen**

Richtungsvektor der Geraden  $AB$ :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade  $g$  ist durch einen Ortsvektor  $\vec{P}$  und einen Richtungsvektor  $\vec{v}$  eindeutig bestimmt:

$$g: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn  $A$  als Aufpunkt genommen wird, dann ist  $\vec{A}$  der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden  $l$ .

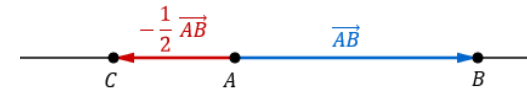
$$l: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

**Lagebeziehung Punkt und Gerade**

Prüfen, ob  $C$  auf der Geraden  $AB$  liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C \in l$$

**Lage des Vektors**

Wegen der Konstruktion der Geraden  $AB$ , kann  $C$  nicht auf der Strecke  $AB$  liegen, da man von  $A$  aus in negativer Richtung  $\left(-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$  gehen muss, um zum Punkt  $C$  zu gelangen.

**Alternative Lösung**

$$\overrightarrow{CB} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Da  $|\overrightarrow{CB}| > |\overrightarrow{AB}|$ , kann  $C$  nicht auf der Strecke  $AB$  liegen.

## Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Auf der Strecke  $[AB]$  gibt es einen Punkt  $D$ , der von  $B$  dreimal so weit entfernt ist wie von  $A$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $D$ .

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b**Vektor bestimmen**



$$\text{Es gilt: } 3 \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$

$$3 \cdot (\vec{D} - \vec{A}) = \vec{B} - \vec{D}$$

$$3\vec{D} - 3\vec{A} = \vec{B} - \vec{D}$$

$$4\vec{D} = \vec{B} + 3\vec{A}$$

$$\vec{D} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{B} + 3\vec{A})$$

$$\vec{D} = \frac{1}{4} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$D(3|1|-6)$$

#### Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben ist die Ebene  $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$ .

Der Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x_1$ -Achse, der Schnittpunkt von  $E$  mit der  $x_2$ -Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

##### Spurpunkte einer Ebene

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$$

$$x_1\text{-Koordinatenachse: } \vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2\text{-Koordinatenachse: } \vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

##### Erläuterung: Spurpunkte einer Ebene

Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Spurpunkte. Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Koordinatenachse in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebene ein, löst nach dem Parameter  $\lambda$  auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

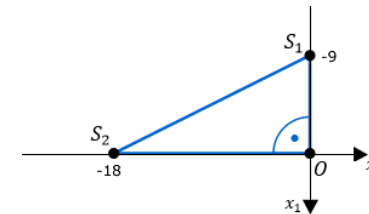
Spurpunkt  $S_1$  mit der  $x_1$ -Koordinatenachse:

$$2\lambda + 0 + 0 = -18 \Rightarrow \lambda = -9 \Rightarrow S_1(-9|0|0)$$

Spurpunkt  $S_2$  mit der  $x_2$ -Koordinatenachse:

$$0 + \lambda + 0 = -18 \Rightarrow \lambda = -18 \Rightarrow S_2(0|-18|0)$$

##### Flächeninhalt eines Dreiecks



$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$$

#### Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von  $E$  als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene  $E$  ist.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

##### Vektor bestimmen

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenvektor*

Ein Vektor der ein vielfaches von einem Normalenvektor einer Ebene ist, ist auch Normalenvektor der Ebene.

$$\vec{v} = k \cdot \vec{n}_E = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Wenn der Vektor  $\vec{v}$  Ortsvektor eines Punktes der Ebene  $E$  ist, dann erfüllen seine Koordinaten auch die Ebenengleichung.

$$2 \cdot 2k + k - 2 \cdot (-2k) = -18$$

$$9k = -18$$

$$k = -2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

#### Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(0|0|1)$ ,  $B(2|6|1)$ ,  $C(-4|8|5)$  und  $D(-6|2|5)$  gegeben. Sie liegen in einer Ebene  $E$  und bilden ein Viereck  $ABCD$ , dessen Diagonalen sich im Punkt  $M$  schneiden.

Begründen Sie, dass die Gerade  $AB$  parallel zur  $x_1 x_2$ -Ebene verläuft.

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

##### *Lagebeziehung Gerade und Ebene*

Richtungsvektor der Geraden  $AB$ :

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade  $g$  ist durch einen Ortsvektor  $\vec{P}$  und einen Richtungsvektor  $\vec{v}$  eindeutig bestimmt:

$$g: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn  $A$  als Aufpunkt genommen wird, dann ist  $\vec{A}$  der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden  $g$ .

$$g: \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die  $x_3$ -Koordinate von  $A$  nicht null ist, liegt die Gerade nicht in der  $x_1 x_2$ -Ebene.

Da weiterhin die  $x_3$ -Koordinate des Richtungsvektors  $\vec{AB}$  null ist, ist die Gerade  $AB$  parallel zur  $x_1 x_2$ -Ebene.

#### Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABCD$  ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $M$ .

(Teilergebnis:  $M(-2|4|3)$ )

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

##### *Lagebeziehung von Vektoren*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} = \vec{C} - \vec{D} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow ABCD \text{ ist ein Parallelogramm}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow ABCD \text{ ist ein Rechteck}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow ABCD \text{ ist ein Rechteck}$$

#### Koordinaten von Punkten ermitteln

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes  $M$  zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  lautet:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M(-2|4|3)$$

#### Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  in Normalenform.  
(mögliches Ergebnis:  $E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ )

#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

##### Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene  $E$ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A(0|0|1)$  sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene  $E$ .

##### Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor  $\vec{n}_E$  der Ebene  $E$  bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)  $\vec{a} \times \vec{b}$  zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist ein Vektor  $\vec{n}$ , der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 0 \\ 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - (-6) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen. Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einem Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit  $\frac{1}{8}$  multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \vec{n}_E = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt  $P$  aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E: \vec{n}_E \circ \vec{X} = \vec{n}_E \circ \vec{P}$$

Hier ( $A$  ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_E} \circ \vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{A}}$$

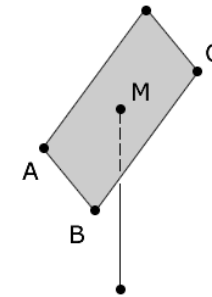
$$E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 + 0 + 5$$

$$E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$$

#### Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck  $ABCD$  dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch

den Punkt  $M$  beschreiben (vgl. Abbildung). Die horizontale Fläche liegt im Modell in der  $x_1 x_2$ -Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Realität.



Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels  $\varphi$  des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen  $30^\circ$  und  $36^\circ$  liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

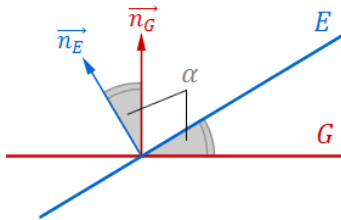
#### Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

##### Winkel zwischen zwei Ebenen

$$\text{Normalenvektor } \vec{n}_E \text{ der Ebene } E: \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor der } x_1 x_2\text{-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: Winkel zwischen zwei Ebenen



Der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Ebenen  $E$  und  $G$  ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren  $\vec{n}_E$  und  $\vec{n}_G$ .

Winkel  $\varphi$  zwischen den Normalenvektoren der Ebene  $E$  und der  $x_1 x_2$ -Ebene bestimmen:

Erläuterung: Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

Erläuterung: Betrag eines Vektors

Die Länge (bzw. der Betrag)  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der  $x_1 x_2$ -Ebene  $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gilt z.B.:

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{0 + 0 + 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{35}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left( \frac{5}{\sqrt{35}} \right) \approx 32,31^\circ$$

**Teilaufgabe Teil B e** (5 BE)

Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene  $E$  verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.

Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt

des Schattens mithilfe des Terms  $|\vec{AB}| \cdot \frac{|\vec{AD}|}{\cos \varphi} \cdot (0,8 \text{ m})^2$  berechnet werden kann.

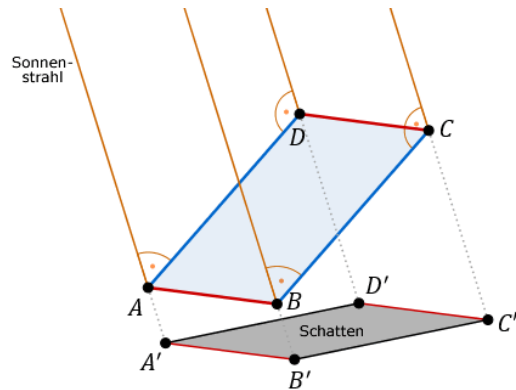
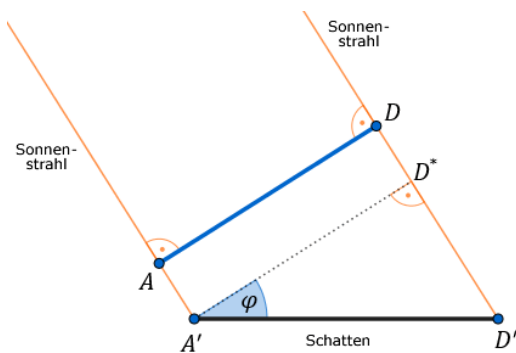
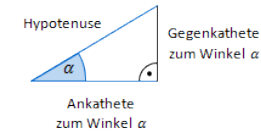
**Lösung zu Teilaufgabe Teil B e**

**Projektion**

Skizze:

Erläuterung:

3D Ansicht:

Die Sonnenstrahlen verlaufen senkrecht zur Ebene  $E$ , also auch auf das Solarmodul.Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*Der Kosinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Hier wird das rechtwinklige Dreieck  $D'D^*A'$  betrachtet. Die Seite  $[A'D^*]$  entspricht der Seite  $[AD]$ .

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{A'D'}|} \Rightarrow |\vec{A'D'}| = \frac{|\vec{AD}|}{\cos \varphi}$$

Da  $\vec{AB}$  parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene verläuft, hat der Schatten von  $\vec{AB}$  die gleiche Länge wie  $\vec{AB}$ .

Somit folgt:

Erläuterung: *Flächeneinheit*

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 0,8 m.

Da es sich hier um einen Flächeninhalt handelt, muss die Einheit im Quadrat verwendet werden.

$$A_{\text{Schatten}} = |\vec{A'B'}| \cdot |\vec{A'D'}| \cdot (0,8 \text{ m})^2 = |\vec{AB}| \cdot \frac{|\vec{AD}|}{\cos \varphi} \cdot (0,8 \text{ m})^2$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

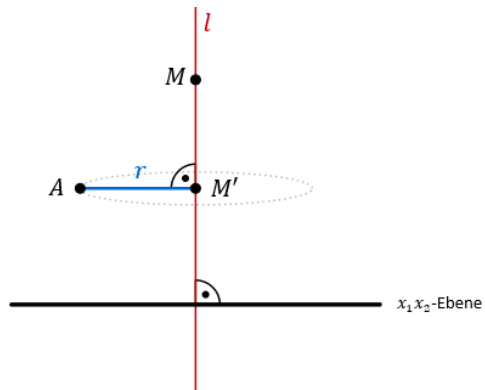


Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels  $\varphi$  gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.

Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt  $A$  dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

### Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

#### Lage eines Punktes



Sei  $l$  die Lotgerade durch  $M(-2|4|3)$  auf die  $x_1x_2$ -Ebene und  $M'$  der Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich  $A(0|0|1)$  bewegt.

#### Erläuterung: Lage des Punktes

Da  $M'$  auf der Lotgeraden liegt, hat er die gleichen  $x_1$ - u.  $x_2$ -Koordinaten wie der Punkt  $M$ .

$$M' \in l \Rightarrow M'(-2|4|x_3)$$

#### Erläuterung: Lage des Punktes

Die Strecke  $[AM']$  ist parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene. Daraus folgt, dass die  $x_3$ -Koordinaten von  $M'$  und  $A$  gleich sind.

$$\overrightarrow{AM'} \parallel x_1x_2\text{-Ebene} \Rightarrow x_{3M'} = x_{3A} \Rightarrow M'(-2|4|1)$$

$$\overrightarrow{AM'} = \vec{M'} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### Erläuterung: Betrag eines Vektors

Die Länge (bzw. der Betrag)  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{AM'}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20}$$

#### Erläuterung: Längeneinheit

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 0,8 m.

$$r = |\overrightarrow{AM'}| \cdot 0,8 \text{ m} = \sqrt{20} \cdot 0,8 \text{ m} \approx 3,58 \text{ m} = 358 \text{ cm}$$