Fachabitur 2016 Mathematik NT Stochastik S II

Am Pausenstand einer Schule werden Kaltgetränke in Glasflaschen (G), Plastikflaschen (P) und Tetrapaks (T) angeboten. Innerhalb einer Woche werden insgesamt 2080 Kaltgetränke verkauft, darunter 624 in Glasflaschen. Der Anteil der Plastikflaschen beträgt 55%. Die Bestimmung des wöchentlichen Kaufverhaltens eines zufällig herausgegriffenen Schülers, der zwei Kaltgetränke pro Woche kauft, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1: „Ein Schüler kauft zwei Kaltgetränke derselben Verpackungsart.“

E_2: „Ein Schüler kauft mindestens ein Kaltgetränk in der Glasflasche.“

$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E_2}}$

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach in Worten und berechnen Sie $P\left(E_3\right)$.

Eine Glasflasche kostet 10 Cent Pfand, eine Plastikflasche 15 Cent und ein Tetrapak ist pfandfrei. Die Zufallsgröße X gibt in Euro an, wie viel Pfand ein zufällig herausgegriffener Schüler in einer Woche gezahlt hat.

Teilaufgabe 1.3.1 (4 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform.

Teilaufgabe 1.3.2 (3 BE)

Berechnen Sie, wie viel Pfand ein Schüler erwartungsgemäß in einem Schuljahr zahlt. Gehen Sie dabei von 38 Schulwochen aus.

Teilaufgabe 1.3.3 (3 BE)

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der gezahlte wöchentliche Pfandbetrag um maximal 10 Cent vom Erwartungswert abweicht.

Bei der Leerung der Müllkörbe wurde festgestellt, dass regelmäßig Pfandflaschen zu finden sind. Die nach $B(n;p)$ verteilte Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der weggeworfenen Flaschen. Von n verkauften Flaschen werden im Mittel 40 Flaschen nicht zurückgegeben. Die Varianz beträgt 24.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Berechnen Sie die Anzahl n der verkauften Pfandflaschen und die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Pfandflasche in den Müll geworfen wird.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Setzen Sie nun $n = 100$ und $p = 0,4$. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:

E_4: „Genau 65 Pfandflaschen werden am Pausenverkauf zurückgegeben.“

E_5: „Mehr als 28 aber weniger als 45 Flaschen werden nicht zurückgegeben.“

Die SMV behauptet, dass sich nach Durchführung einer Umwelt-Kampagne die schlechte Retourquote von lediglich 60% der Pfandflaschen erhöht hat (Gegenhypothese). Um den Erfolg dieser Aktion zu überprüfen, werden 100 markierte Flaschen in Hinblick auf ihre Rückgabe untersucht

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Interpretieren Sie im Sachzusammenhang, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 35% der Flaschen im Test nicht zurückgegeben werden.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_6: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben.“

E_7: „Eine Pfandflasche enthielt Mineralwasser.“

E_8: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben und enthielt kein Mineralwasser.“

Dabei gelte: $P\ (E_6) = 0,6$; $P\ (E_7) = 0,3$; $P\ (E_8) = 0,42$

Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse E_6 und E_7 vereinbar und stochastisch unabhängig sind.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Am Pausenstand einer Schule werden Kaltgetränke in Glasflaschen (G), Plastikflaschen (P) und Tetrapaks (T) angeboten. Innerhalb einer Woche werden insgesamt 2080 Kaltgetränke verkauft, darunter 624 in Glasflaschen. Der Anteil der Plastikflaschen beträgt 55%. Die Bestimmung des wöchentlichen Kaufverhaltens eines zufällig herausgegriffenen Schülers, der zwei Kaltgetränke pro Woche kauft, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.

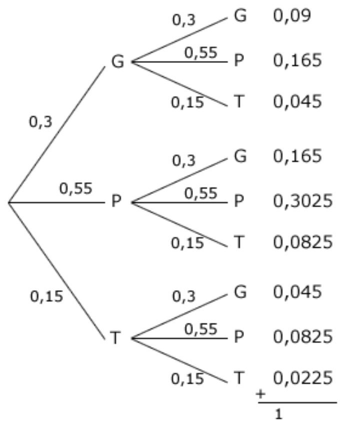
Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

$$P(G) = \frac{624}{2080} = 0,3$$

$$P(P) = 55\% = 0,55$$

$$P(T) = 1 - 0,3 - 0,55 = 0,15$$



Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1: „Ein Schüler kauft zwei Kaltgetränke derselben Verpackungsart.“

E_2: „Ein Schüler kauft mindestens ein Kaltgetränk in der Glasflasche.“

$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E_2}}$

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach in Worten und berechnen Sie $P\ (E_3)$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Ereignis in Mengenschreibweise

$E_1 = \{\text{GG},\ \text{PP},\ \text{TT}\}$

$E_2 = \{\text{GG},\ \text{GP},\ \text{GT},\ \text{PG},\ \text{TG}\}$

$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E_2}} = \overline{E_1} \cap E_2$

$\overline{E_1} = \{\text{GP},\ \text{GT},\ \text{PG},\ \text{PT},\ \text{TG},\ \text{TP}\}$

$E_3 = \{\text{GP},\ \text{GT},\ \text{PG},\ \text{TG}\}$

Ereignis beschreiben

E_3 : „Es wird genau ein Kaltgetränk in der Glasflasche gekauft“

Wahrscheinlichkeit

$P\ (E_3) = 0,165 + 0,045 + 0,165 + 0,045 = 0,42$

Teilaufgabe 1.3.1 (4 BE)

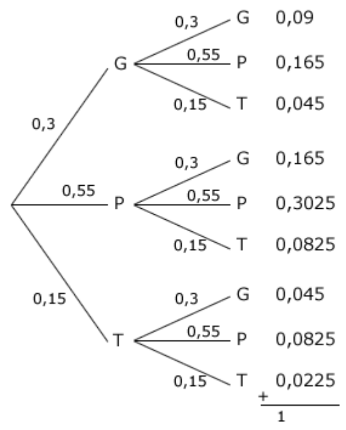
Eine Glasflasche kostet 10 Cent Pfand, eine Plastikflasche 15 Cent und ein Tetrapak ist pfandfrei. Die Zufallsgröße X gibt in Euro an, wie viel Pfand ein zufällig herausgegriffener Schüler in einer Woche gezahlt hat.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Baumdiagramm aus Teilaufgabe 1.1:



$P(X = 0) = P(\text{TT}) = 0,0225$

$P(X = 0,1) = P(\text{GT}) + P(\text{TG}) = 2 \cdot 0,045 = 0,09$

$P(X = 0,15) = P(\text{PT}) + P(\text{TP}) = 0,0825 \cdot 2 = 0,165$

$P(X = 0,2) = P(\text{GG}) = 0,09$

$P(X = 0,25) = P(\text{GP}) + P(\text{PG}) = 0,165 \cdot 2 = 0,33$

$P(X = 0,3) = P(\text{PP}) = 0,3025$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X_i in €	0	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	Σ
$P(X = x_i)$	0,0225	0,09	0,165	0,09	0,33	0,3025	1

Teilaufgabe 1.3.2 (3 BE)

Berechnen Sie, wie viel Pfand ein Schüler erwartungsgemäß in einem Schuljahr zahlt. Gehen Sie dabei von 38 Schulwochen aus.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3.2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Tabelle aus 1.3.1

X_i in €	0	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	Σ
$P(X = x_i)$	0,0225	0,09	0,165	0,09	0,33	0,3025	1

Durchschnittliches Pfand pro Woche:

$$\begin{aligned} E(X) \;=\; & 0 \cdot 0,0225 \;+\; 0,1 \cdot 0,09 \;+\; 0,15 \cdot 0,165 \\ & 0,2 \cdot 0,09 \;+\; 0,25 \cdot 0,33 \;+\; 0,3 \cdot 0,3025 \end{aligned}$$

$E(X) = 0,225 = \mu$

Durchschnittliches Pfand pro Woche: $38 \cdot 0,225 = 8,55$ €

Teilaufgabe 1.3.3 (3 BE)

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der gezahlte wöchentliche Pfandbetrag um maximal 10 Cent vom Erwartungswert abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3.3

Wahrscheinlichkeit

Tabelle aus 1.3.1

X_i in €	0	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	Σ
$P(X = x_i)$	0,0225	0,09	0,165	0,09	0,33	0,3025	1

$\mu = 0,225$ (aus Teilaufgabe 1.3.2)

$P(\mu - 0,1 < X < \mu + 0,1) = P(0,125 < X < 0,325)$

$P(\mu - 0,1 < X < \mu + 0,1) = P(X = 0,15) + P(X = 0,2) + P(X = 0,25) + P(X = 0,3)$

$P(\mu - 0,1 < X < \mu + 0,1) = 0,165 + 0,09 + 0,33 + 0,3025$

$P(\mu - 0,1 < X < \mu + 0,1) = 0,8875$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Bei der Leerung der Müllkörbe wurde festgestellt, dass regelmäßig Pfandflaschen zu finden sind. Die nach $B(n;p)$ verteilte Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der weggeworfenen Flaschen. Von n verkauften Flaschen werden im Mittel 40 Flaschen nicht zurückgegeben. Die Varianz beträgt 24.

Berechnen Sie die Anzahl n der verkauften Pfandflaschen und die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Pfandflasche in den Müll geworfen wird.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Varianz einer Zufallsgröße

$\mu = 40$

$\sigma^2 = 24 = \mathrm{Var}(X)$

Für eine binomialverteilte Größe gilt (s. Merkhilfe):

$\mu = n \cdot p$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \underbrace{n \cdot p}_{\mu} \cdot q = \mu \cdot q$

Somit folgt:

$24 = 40 \cdot q \quad \Rightarrow \quad q = 0,6$ (Wahrscheinlichkeit einer Niete)

$p = 1 - q = 0,4$ (Wahrscheinlichkeit eines Treffers)

$40 = n \cdot 0,4 \quad \Rightarrow \quad n = 100$ (Anzahl der verkauften Pfandflaschen)

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Setzen Sie nun $n = 100$ und $p = 0,4$. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:

E_4: „Genau 65 Pfandflaschen werden am Pausenverkauf zurückgegeben.“

E_5: „Mehr als 28 aber weniger als 45 Flaschen werden nicht zurückgegeben.“

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Binomialverteilung

$p = 0,4$ Pfandflasche landet im Müll

$q = 0,6$ Pfandflasche wird zurückgegeben

$P\ (E_4) = P_{0,6}^{100}(Y = 65) \overset{\text{TW}}{=} 0,04913$

$P\ (E_5) = P_{0,4}^{100}(28 < Y < 45) = P_{0,4}^{100}(Y \leq 44) - P_{0,4}^{100}(Y \leq 28) \overset{\text{TW}}{=} 0,82110 - 0,0084 = 0,81267$

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Die SMV behauptet, dass sich nach Durchführung einer Umwelt-Kampagne die schlechte Retourquote von lediglich 60% der Pfandflaschen erhöht hat (Gegenhypothese). Um den Erfolg dieser Aktion zu überprüfen, werden 100 markierte Flaschen in Hinblick auf ihre Rückgabe untersucht

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

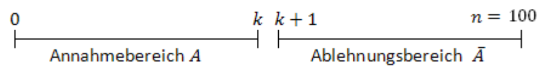
Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Hypothesentest - Fehler erster Art

T: Anzahl der zurückgegebenen Pfandflaschen von 100

$H_0 : p_0 = 0,6$

$H_1 : p_1 > 0,6$

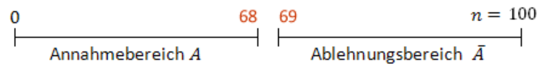


$P_{0,6}^{100}(T \geq k + 1) \leq 0,05$

$1 - P_{0,6}^{100}(T \leq k) \leq 0,05$

$0,95 \leq P_{0,6}^{100}(T \leq k)$

Tafelwerk: $k \geq 68$



$A = \{0, 1, \ldots, 68\}$

$\overline{A} = \{69, 70, \ldots, 100\}$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Interpretieren Sie im Sachzusammenhang, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 35% der Flaschen im Test nicht zurückgegeben werden.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Hypothesentest - Entscheidungsregel

35% von 100 = 35 Flaschen werden nicht zuurückgegeben

65 Flaschen werden zurückgegeben

$65 \in A \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird angenommen

Umwelt-Kampagne brachte keinen positiven Einfluss auf Rückgabequote.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_6: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben."

E_7: „Eine Pfandflasche enthielt Mineralwasser."

E_8: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben und enthielt kein Mineralwasser."

Dabei gelte: $P\ (E_6) = 0,6$; $P\ (E_7) = 0,3$; $P\ (E_8) = 0,42$

Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse E_6 und E_7 vereinbar und stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Stochastische Unabhängigkeit

$E_6 \cap E_7$: „Pfandflasche wurde zurückgegeben **und** enthielt Mineralwasser"

$P\ (E_6) = P\ (E_6 \cap E_7) + P\ (E_8)$

$P\ (E_6 \cap E_7) = P\ (E_6) - P\ (E_8) = 0,6 - 0,42 = 0,18$

$$\begin{array}{ccc} P\ (E_6) \cdot P\ (E_7) & = & P\ (E_6 \cap E_7) \\ 0,6 \cdot 0,3 & = & 0,18 \\ 0,18 & = & 0,18 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad E_6$ und E_7 sind stochastisch unabhängig

Unvereinbarkeit zweier Ereignisse

$E_6 \cap E_7 \neq \{\ \}$, da $P\ (E_6 \cap E_7) = 0,18 \neq 0$

$\Rightarrow \quad E_6$ und E_7 sind vereinbar