# Fachabitur 2016 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{3}{16}(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right)(4-x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

**Teilaufgabe 1.1** (3 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$ und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

**Teilaufgabe 1.2** (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{16}\left(3x^3 + x^2 - 40x - 48\right)$ darstellen lässt.

**Teilaufgabe 1.3** (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen $G_f$.

**Teilaufgabe 1.4** (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von $f$ im Bereich $-4 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

**Teilaufgabe 1.5** (6 BE)

Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen $G_f$ im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen $G_f$ größer ist als die berechnete Tangentensteigung.

**Teilaufgabe 1.6** (6 BE)

Die Parabel $P$ ist der Graph der quadratischen Funktion $p$. $S(-4|4)$ ist der Hochpunkt von $P$ und zugleich Schnittpunkt von $P$ mit $G_f$. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse. Ermitteln Sie den Funktionsterm von $p$ und zeichnen Sie die Parabel $P$ im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem ein.

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$]

**Teilaufgabe 1.7** (5 BE)

Die Graphen $G_f$ und $P$ schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

Gegeben ist die Funktionenschar $g_a : x \mapsto 0,25\left(x^3 - 2a\,x^2\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$.





**Teilaufgabe 2.1** (5 BE)

Ermitteln Sie die Nullstellen von $g_a$ und geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von $a$ an.

Nun wird $a = 3$ gesetzt und es gilt: $g_3(x) = 0,25\left(x^3 - 6x^2\right)$. Des Weiteren ist die lineare Funktion $t : x \mapsto -3x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

**Teilaufgabe 2.2.1** (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von $G_3$.

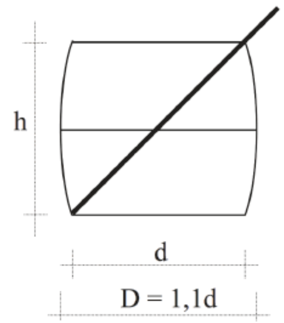
**Teilaufgabe 2.2.2** (5 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die abschnittsweise definierte Funktion $h : x \mapsto \begin{cases} g_3(x) & \text{für } x \leq 2 \\ t(x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ an der Nahtstelle differenzierbar ist.

**Teilaufgabe 2.2.3** (2 BE)

Beschreiben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben die besondere Lage des Graphen der linearen Funktion $t$ in Bezug auf $G_3$.

Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(2D^2 + d^2\right)$. Hierbei ist $d$ jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und $D$ der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll $D$ 10% größer sein als $d$. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



**Teilaufgabe 3.1** (4 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V$ auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe $h$ beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-h^3 + 100h\right)$]

**Teilaufgabe 3.2** (7 BE)

Mit der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe $h$ in cm und das zugehörige Volumen in $\text{cm}^3$ auf eine Nachkommastelle gerundet.





# Lösung

**Teilaufgabe 1.1** (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{3}{16}(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right)(4-x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$ und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

## Lösung zu Teilaufgabe 1.1

***Nullstellen einer Funktion***

$$f(x) = \frac{3}{16}(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right)(4-x)$$

$$f(x) = 0$$

$$0 = \frac{3}{16}(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right)(4-x)$$

1. $x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = -3$
2. $x+\frac{4}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x_2^N = -\frac{4}{3}$
3. $4-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_3^N = 4$

***Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs***

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{16}\underbrace{(x+3)}_{\to+\infty}\underbrace{\left(x+\frac{4}{3}\right)}_{\to+\infty}\underbrace{(4-x)}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{16}\underbrace{\underbrace{(x+3)}_{\to-\infty}\underbrace{\left(x+\frac{4}{3}\right)}_{\to-\infty}}_{\to+\infty}\underbrace{(4-x)}_{\to+\infty} = +\infty$$

**Teilaufgabe 1.2** (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{16}\left(3x^3 + x^2 - 40x - 48\right)$ darstellen lässt.

## Lösung zu Teilaufgabe 1.2

***Termumformung***

$$f(x) = \frac{3}{16}(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right)(4-x)$$

$$f(x) = \frac{3}{16}\left(x^2+\frac{4}{3}x+3x+4\right)(4-x)$$

$$f(x) = \frac{3}{16}\left(4x^2+\frac{16}{3}x+12x+16-x^3-\frac{4}{3}x^2-3x^2-4x\right)$$

$$f(x) = \frac{3}{16}\left(-x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{40}{3}x+16\right)$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}\left(3x^3+x^2-40x-48\right)$$

## Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen $G_f$.

## Lösung zu Teilaufgabe 1.3

***Lage von Extrempunkten ermitteln***

$$f(x) = -\frac{1}{16}\left(3x^3+x^2-40x-48\right)$$

Erste und zweite Ableitung bilden:

$$f'(x) = -\frac{1}{16}\left(9x^2+2x-40\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{16}\left(18x+2\right)$$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$





$$0 = 9x^2+2x-40$$

$$x^E_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 9\cdot 40}}{2\cdot 9} = \frac{-2\pm 38}{18}$$

$$\Rightarrow \quad x^E_1 = 2\ ; \quad x^E_2 = -\frac{20}{9} \approx -2,22$$

Lage der (möglichen) Extrempunkte ermitteln:

$$y^E_1 = f(2) = \frac{25}{4} = 6,25$$

$$y^E_2 = f\left(-\frac{20}{9}\right) = -\frac{196}{243} \approx -0,8$$

***Art von Extrempunkten ermitteln***

$$f''(2) = -\frac{19}{8} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Maximum } E_1\left(2|\frac{25}{4}\right)$$

$$f''\left(-\frac{20}{9}\right) = \frac{19}{8} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Minimum } E_2\left(-\frac{20}{9}|-\frac{196}{243}\right)$$

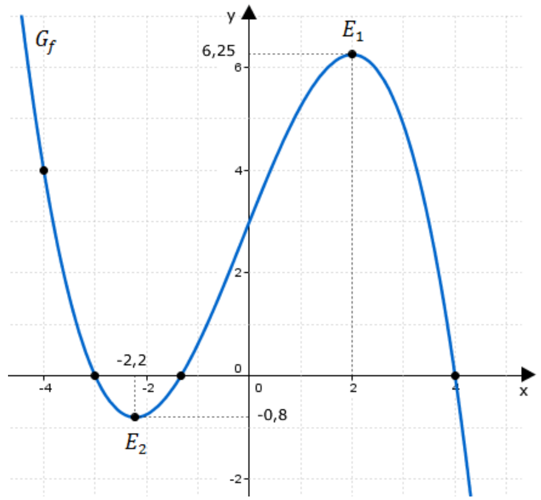
## Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von $f$ im Bereich $-4 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

## Lösung zu Teilaufgabe 1.4

***Skizze***

$$f(-4) = 4$$




## Teilaufgabe 1.5 (6 BE)

Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen $G_f$ im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen $G_f$ größer ist als die berechnete Tangentensteigung.

## Lösung zu Teilaufgabe 1.5

***Steigung eines Funktionsgraphen***

$$f(x) = -\frac{1}{16}\left(3x^3 + x^2 - 40x - 48\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{16}\left(9x^2 + 2x - 40\right)$$

$y$-Achsenabschnitt: $S_y(0|3)$

Steigung der Tangenten in $S_y$: $m = f'(0) = 2,5$





Bereich ermitteln: $f'(x) > 2,5$

$$-\frac{1}{16}\left(9x^2 + 2x - 40\right) > 2,5 \qquad | \cdot(-16)$$

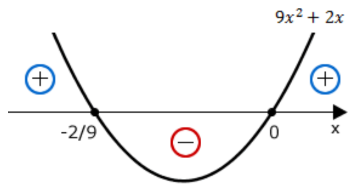
$$9x^2 + 2x - 40 < -40 \qquad | +40$$

$$9x^2 + 2x < 0$$

$$9x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (9x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{9}$$

Skizze:




Für $x \in \left]-\frac{2}{9}; 0\right[$ ist die Steigung von $G_f$ größer als $m$.

## Teilaufgabe 1.6 (6 BE)

Die Parabel $P$ ist der Graph der quadratischen Funktion $p$. $S(-4|4)$ ist der Hochpunkt von $P$ und zugleich Schnittpunkt von $P$ mit $G_f$. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse. Ermitteln Sie den Funktionsterm von $p$ und zeichnen Sie die Parabel $P$ im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem ein.

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$]

## Lösung zu Teilaufgabe 1.6

***Funktionsgleichung ermitteln***

Scheitelpunktform: $p(x) = a \cdot (x + 4)^2 + 4$

Schnittpunkt $SP_y(0|3)$ einsetzen:

$3 = a(0+4)^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 = 16a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{16}$

$p(x) = -\frac{1}{16} \cdot (x+4)^2 + 4$

$p(x) = -\frac{1}{16} \cdot \left(x^2 + 8x + 16\right) + 4$

$p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

***Alternative Lösung***

$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

$p'(x) = 2a\,x + b$

Punkt $SP_y(0|3)$ einsetzen: $p(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3$

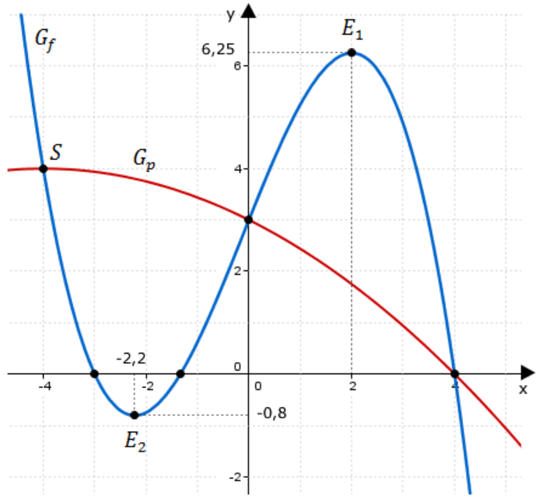
Punkt $S$ einsetzen:
$p(-4) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 16a - 4b + 3$
$p'(-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -8a + b$

Gleichungssystem lösen: $b = -\frac{1}{2}\ ;\ a = -\frac{1}{16}$

***Skizze***





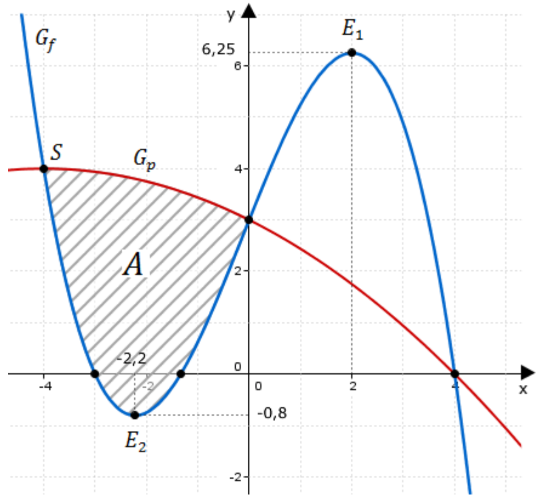



**Teilaufgabe 1.7** (5 BE)

Die Graphen $G_f$ und $P$ schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

**Lösung zu Teilaufgabe 1.7**

***Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen***




$$A = \int\limits_{-4}^{0} \left(p(x) - f(x)\right) \;\, \mathrm{dx}$$

$$A = \int\limits_{-4}^{0} \left(-\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{16}\left(3x^3 + x^2 - 40x - 48\right)\right) \;\, \mathrm{dx}$$

$$A = \int\limits_{-4}^{0} \left(\frac{3}{16}x^3 - 3x\right) \;\, \mathrm{dx}$$

$$A = \left[\frac{3}{64}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-4}^{0}$$

$$A = 0 - \left(\frac{3}{64} \cdot (-4)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-4)^2\right)$$

$$A = 12$$





**Teilaufgabe 2.1** (5 BE)

Gegeben ist die Funktionenschar $g_a : x \mapsto 0,25\,\left(x^3 - 2a\,x^2\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Nullstellen von $g_a$ und geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von $a$ an.

**Lösung zu Teilaufgabe 2.1**

***Nullstellen einer Funktion***

$$g_a(x) = 0,25 \cdot \left(x^3 - 2a\,x^2\right)\,, \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$g_a(x) = 0$$

$$0 = 0,25 \cdot \left(x^3 - 2a\,x^2\right)$$

$$0 = 0,25x^2 \cdot (x - 2a)$$

1. $0,25x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = 0$

2. $x - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^N = 2a$

***Vielfachheit von Nullstellen***

Fallunterscheidung:

1. Fall: $a = 0 \quad \Rightarrow \quad x^N = 0$ 3-fache Nullstelle

2. Fall: $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^N = 0$ 2-fache Nullstelle, $x^N = 2a$ 1-fache Nullstelle

**Teilaufgabe 2.2.1** (4 BE)

Nun wird $a = 3$ gesetzt und es gilt: $g_3(x) = 0,25\,\left(x^3 - 6x^2\right)$. Des Weiteren ist die lineare Funktion $t : x \mapsto -3x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von $G_3$.

**Lösung zu Teilaufgabe 2.2.1**

***Wendepunkt ermitteln***

$g_3(x) = 0,25\,\left(x^3 - 6x^2\right)$

Ableitungen bilden:

$g_3'(x) = 0,25\,\left(3x^2 - 12x\right)$

$g_3''(x) = 0,25\,(6x - 12)$

$g_3'''(x) = 0,25 \cdot 6 = 1,5$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $g_3''(x) = 0$

$0 = 0,25\,(6x - 12)$

$0 = 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad x^{\text{WP}} = 2$

Prüfen, ob es sich um eine Wendestelle handelt:

$g_3'''(2) = 1,5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}(2|-4)$

**Teilaufgabe 2.2.2** (5 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die abschnittsweise definierte Funktion $h : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} g_3(x) & \text{für } x \leq 2 \\ t(x) & \text{für } x > 2 \end{array} \right.$ an der Nahtstelle differenzierbar ist.

**Lösung zu Teilaufgabe 2.2.2**

***Stetigkeit einer Funktion***

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0,25\,\left(x^3 - 6x^2\right) & x \leq 2 \\ -3x + 2 & x > 2 \end{array} \right.$$

Stetigkeit überprüfen:





$$\left.\begin{array}{rcl} h(2) = 0,25\,\left(2^3 - 6 \cdot 2^2\right) & = & -4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (-3x + 2) & = & -4 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} 0,25\,\left(x^3 - 6x^2\right) & = & -4 \end{array}\right\} \quad \text{stetig bei } x_0 = 2$$

***Differenzierbarkeit einer Funktion***

Ableitung bilden:

$$h'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0,25\,\left(3x^2 - 12x\right) & x < 2 \\ -3 & x > 2 \end{array} \right.$$

Differenzierbarkeit überprüfen:

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 2^-} 0,25\,\left(3x^2 - 12x\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} h'(x) & = & -3 \end{array}\right\} \quad \text{differenzierbar bei } x_0 = 2$$

**Teilaufgabe 2.2.3** (2 BE)

Beschreiben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben die besondere Lage des Graphen der linearen Funktion $t$ in Bezug auf $G_3$.

**Lösung zu Teilaufgabe 2.2.3**

***Lagebeziehung von Funktionen***

$t$ ist Wendetangente an $G_3$.

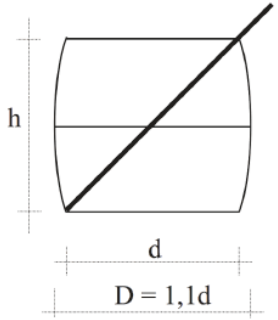
Oder:

- $G_t$ und $G_3$ gehen durch WP$(2|-4)$
- $G_t$ und $G_3$ haben bei $x = 2$ gleiche Steigung
- $t$ ist Wendetangente

**Teilaufgabe 3.1** (4 BE)

Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(2D^2 + d^2\right)$. Hierbei ist $d$ jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und $D$ der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen).

Weiterhin soll $D$ 10% größer sein als $d$. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).




Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V$ auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe $h$ beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-h^3 + 100h\right)$]

## Lösung zu Teilaufgabe 3.1

***Volumen eines geometrischen Körpers***

$D = 1,1d = \frac{11}{10}d$ in $V$ einsetzen:

$$V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(2\left(\frac{11}{10}d\right)^2 + d^2\right) = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(\frac{171}{50}d^2\right)$$

$$V(h,d) = \frac{57}{200}\pi \cdot h \cdot d^2$$

Strohhalm im Becher: 10 cm

Pythagoras: $10^2 = d^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 100 - h^2$

$$V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot h \cdot \left(100 - h^2\right) = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-h^3 + 100h\right)$$





**Teilaufgabe 3.2** (7 BE)

Mit der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe $h$ in cm und das zugehörige Volumen in cm$^3$ auf eine Nachkommastelle gerundet.

## Lösung zu Teilaufgabe 3.2

***Extremwertaufgabe***

$$V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-h^3 + 100h\right), \qquad D_V = [5;9]$$

Erste Ableitung bilden: $V'(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-3h^2 + 100\right) \quad , D_{V'} = ]5;9[$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $V'(h) = 0$

$$0 = \frac{57}{200}\pi \cdot \left(-3h^2 + 100\right)$$

$$0 = -3h^2 + 100 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2 = \frac{100}{3} \quad \Rightarrow \quad h \overset{+}{=}(-)\sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5,77 \text{ cm}$$

Zweite Ableitung bilden: $V''(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot (-6h) \quad , D_{V''} = ]5;9[$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Extemstelle prüfen:

$$V''\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) \approx -31,02 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Maximum}$$

Randbetrachtung:

$V(5) = 335,8 \text{ cm}^3$

$V(9) = 153,1 \text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad$ abs. kleinstes Volumen für $h = 9$ cm