Fachabitur 2016 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f mit jeweiliger Vielfachheit.

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Berechnen Sie die maximale positive Steigung des Graphen G_f.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-6 \leq x \leq 1$ unter Kennzeichnung bisheriger Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Der Graph G_p der quadratischen Funktion p enthält die Punkte $A(-6|6)$, $B(-2|-2)$ und $C(1|2,5)$.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 4x\right)$]

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_p im Bereich $-6 \leq x \leq 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Die Graphen G_f und G_p schließen insgesamt zwei endliche Flächenstücke ein. Markieren Sie im vorhandenen Koordinatensystem das weiter links gelegene und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die ganzzahligen Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden.

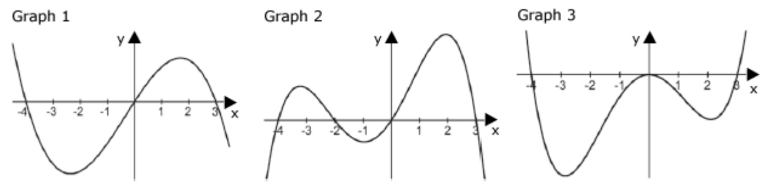
Gegeben sind die reellen Funktionen $h_t: x \mapsto \frac{1}{4}x(t\,x-1)(x+4)(x-3)$ mit $D_{h_t} = \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

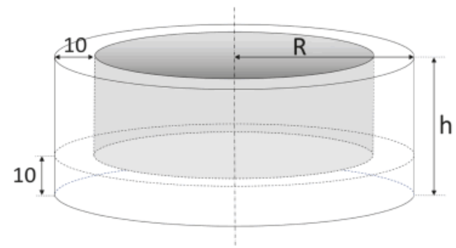
Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion h_t in Abhängigkeit von t.

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Begründen Sie, welche der im Folgenden dargestellten Graphen zur Funktionenschar h_t gehören können und welche nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung mithilfe der ganzzahligen Nullstellen und ggf. des Grenzverhaltens bzw. des Leitkoeffizienten. Geben Sie für den Fall, dass der Graph zur Funktionenschar h_t gehört, den zutreffenden Wert von t an.



Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen.



Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(R) = \pi\left(-10R^2 + 1700R - 8000\right)$]

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Mit der Vorgabe $10 < R \leq 55$ soll die Funktion $V : R \mapsto V(R)$ den absolut größten Wert annehmen. Berechnen Sie für diesen Fall die maximale Füllhöhe des Planschbeckens.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{4}\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f mit jeweiliger Vielfachheit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 0$

$$0 = -\frac{1}{4}\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right)$$

$$0 = -\frac{1}{4}x \cdot \left(x^2 + 8x + 16\right)$$

1. $-\frac{1}{4}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = 0 \quad$ (einfache Nullstelle)

2. $x^2 + 8x + 16 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2} = -4$$

$\Rightarrow \quad x_2^N = -4 \quad$ (zweifache Nullstelle)

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Monotonieverhalten einer Funktion

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\left(3x^2 + 16x + 16\right)$$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $f'(x) = 0$

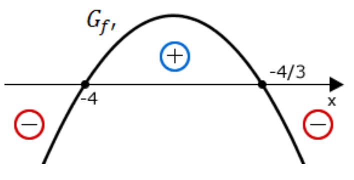
$$0 = -\frac{1}{4}\left(3x^2 + 16x + 16\right)$$

$$0 = 3x^2 + 16x + 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{-16 \pm 8}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^E = -\frac{4}{3} \quad ; \quad x_2^E = -4$$

Skizze von f':



$f'(x) > 0$ für $x \in \left]-4; -\frac{4}{3}\right[$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist streng monoton steigend für $x \in \left[-4; -\frac{4}{3}\right]$

$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty; -4[\cup \left]-\frac{4}{3}; \infty\right[$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty; -4] \cup \left[-\frac{4}{3}; \infty\right[$

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$y_1^E = f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} \approx 2,37$$

$$y_2^E = f(-4) = 0$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Aus dem Monotonieverhalten folgt:

$E_1\left(-\frac{4}{3}\middle|\frac{64}{27}\right)$ ist ein Hochpunkt und $E_2(-4|0)$ ein Tiefpunkt.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Berechnen Sie die maximale positive Steigung des Graphen G_f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Extremwertaufgabe

Größtmögliche Steigung im Wendepunkt.

Wendestelle ermitteln:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(6x + 16)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{\text{WP}} = -\frac{8}{3}$$

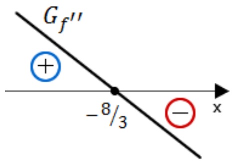
Steigung an der Wendestelle: $\quad f'\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Nachweis Maximum über dritte Ableitung:

$$f'''\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{max. Steigung } m_{\max} = \frac{4}{3}$$

Alternativ:

Skizze von f'':



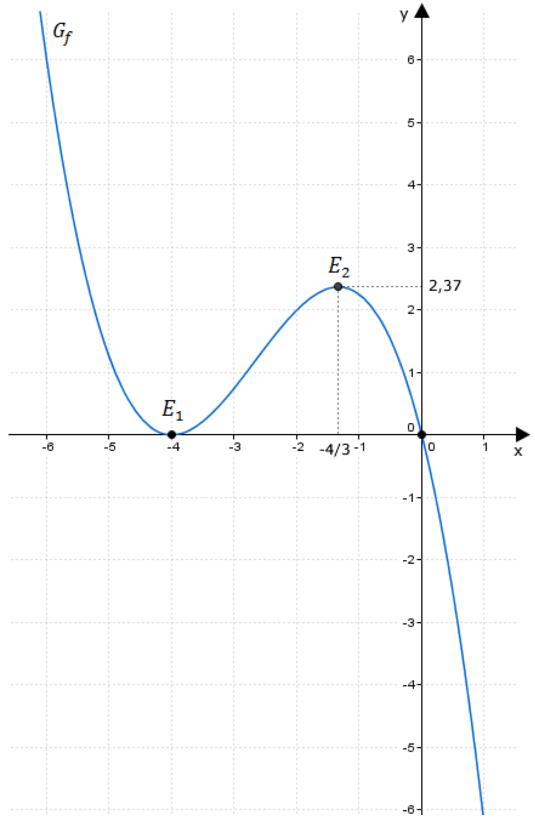
Vorzeichenwechsel in f'' von $+ \to -$ bei $x = -\frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ max. Steigung $m_{\max} = \frac{4}{3}$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-6 \leq x \leq 1$ unter Kennzeichnung bisheriger Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze



Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Der Graph G_p der quadratischen Funktion p enthält die Punkte $A(-6|6)$, $B(-2|-2)$ und $C(1|2,5)$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}\,(x^2 + 4x)$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Funktionsgleichung ermitteln

$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Punkte einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} p(-6) &=& 6 \\ p(-2) &=& -2 \\ p(1) &=& 2,5 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{I} & 6 &=& 36a - 6b + c \\ \text{II} & -2 &=& 4a - 2b + c \\ \text{III} & 2,5 &=& a + b + c \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{lcc} \text{I - II} & 8 = 32a - 4b & \text{II*} \\ \text{I- III} & 3,5 = 35a - 7b & \text{III*} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc} \text{II*:4} & 2 = 8a - b & \text{II**} \\ \text{III*:3,5} & 1 = 10a - 2b & \text{III**} \end{array}$$

$-2 \cdot \text{II**} + \text{III**} \qquad -3 = -6a \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

a in II** einsetzen: $\quad 2 = 4 - b \quad \Rightarrow \quad b = 2$

a und b in III einsetzen: $\quad 2,5 = 0,5 + 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0$

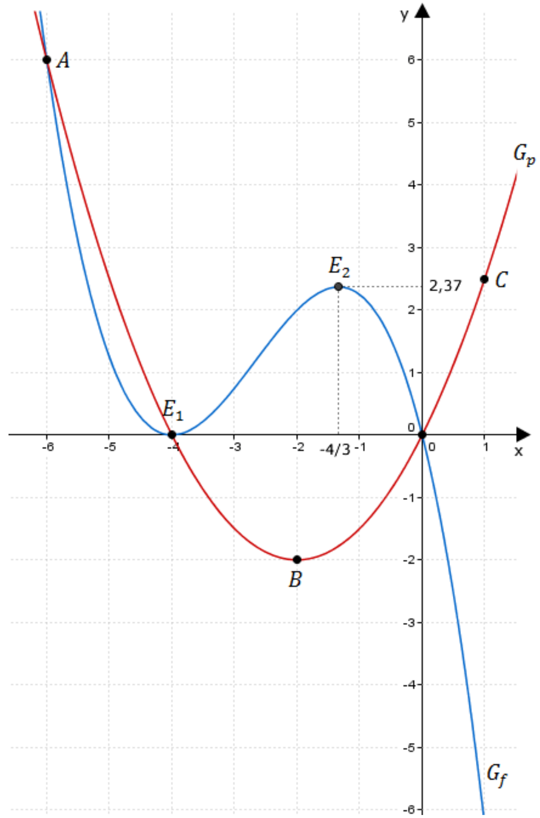
Gefundene Werte in p einsetzen: $\quad p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_p im Bereich $-6 \leq x \leq 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Skizze

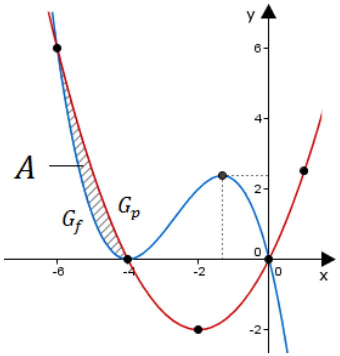


Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Die Graphen G_f und G_p schließen insgesamt zwei endliche Flächenstücke ein. Markieren Sie im vorhandenen Koordinatensystem das weiter links gelegene und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die ganzzahligen Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Skizze



Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

$$A = \int_{-6}^{-4} \left(p(x) - f(x)\right) \;\text{dx}$$

$$A = \int_{-6}^{-4} \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \left(-\frac{1}{4}\right)\;\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right)\right] \;\text{dx}$$

$$A = \int_{-6}^{-4} \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x\right) \;\text{dx}$$

$$A = \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 3x^2\right]_{-6}^{-4}$$

$$A = \left(\frac{1}{16}\cdot(-4)^4 + \frac{5}{6}\cdot(-4)^3 + 3\cdot(-4)^2\right) - \left(\frac{1}{16}\cdot(-6)^4 + \frac{5}{6}\cdot(-6)^3 + 3\cdot(-6)^2\right)$$

$$A = \frac{5}{3}$$

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $h_t : x \mapsto \frac{1}{4}x(t\,x-1)(x+4)(x-3)$ mit $D_{h_t} = \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion h_t in Abhängigkeit von t.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Nullstellen einer Funktion

$$h_t(x) = \frac{1}{4}x\cdot(t\,x-1)\cdot(x+4)\cdot(x-3), \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$h_t(x) = 0$$

1. $\frac{1}{4}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = 0$

2. $t\,x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^N = \frac{1}{t}$ für $t \neq 0$

3. $x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3^N = -4$

4. $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4^N = 3$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $t = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_2^N = x_3^N = -4 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=-4 \\ x=3 \end{matrix}\right\}$ 3 Nullstellen

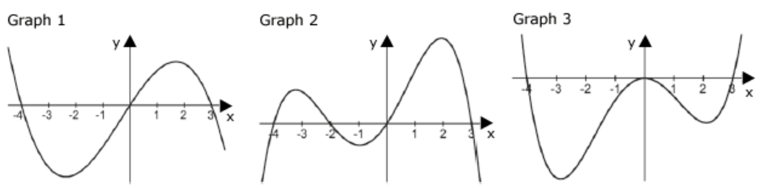
2. Fall: $t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2^N = x_4^N = 3 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=-4 \\ x=3 \end{matrix}\right\}$ 3 Nullstellen

3. Fall: $t = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0(x) = \frac{1}{4}x\cdot(x+4)\cdot(x-3) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=-4 \\ x=3 \end{matrix}\right\}$ 3 Nullstellen

4. Fall: $t \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{4}; 0; 3\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ x=\frac{1}{t} \\ x=-4 \\ x=3 \end{matrix}\right\}$ 4 Nullstellen

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Begründen Sie, welche der im Folgenden dargestellten Graphen zur Funktionenschar h_t gehören können und welche nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung mithilfe der ganzzahligen Nullstellen und ggf. des Grenzverhaltens bzw. des Leitkoeffizienten. Geben Sie für den Fall, dass der Graph zur Funktionenschar h_t gehört, den zutreffenden Wert von t an.



Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Eigenschaften einer Funktion

Graph 1:

Für $t = 0$ (vgl. 3. Fall in Teilaufgabe 3.1) hat G_{h_0} drei Nullstellen bei $x = 0$, $x = -4$ und $x = 3$; der Leitkoeffizient ist $-\frac{1}{4}$, somit verläuft der Funktionsgraph wie dargestellt von links oben nach rechts unten.

Graph 2:

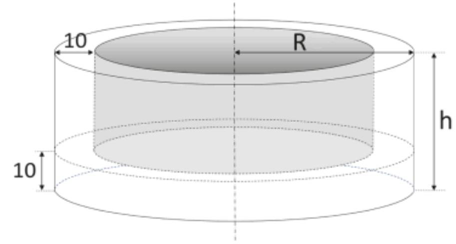
Für $t = -0,5$ (vgl. 4. Fall in Teilaufgabe 3.1) hat $G_{h_{-0,5}}$ vier Nullstellen bei $x = 0$, $x = -4$, $x = 3$ und $x = -2$; der Leitkoeffizient ist $-\frac{1}{8}$, somit verläuft der Funktionsgraph wie dargestellt von links unten nach rechts unten.

Graph 3:

Gehört nicht zur Funktionsschar, da es kein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x = 0$ eine doppelte Nullstelle ist.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen.



Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(R) = \pi\left(-10R^2 + 1700R - 8000\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Volumen eines Zylinders

Nebenbedingung:

„Die Summe aus Radius ...“ $\quad\Rightarrow\quad 90 = R + h \quad\Rightarrow\quad h = 90 - R$

$$V = V_{\text{Zylinder außen}} - V_{\text{Zylinder innen}}$$

$$V = R^2 \cdot \pi \cdot h - (R - 10)^2 \cdot \pi \cdot (h - 10)$$

$$V = R^2 \cdot \pi \cdot (90 - R) - (R - 10)^2 \cdot \pi \cdot (90 - R - 10)$$

$$V = R^2 \cdot \pi \cdot (90 - R) - \left(R^2 - 20R + 100\right) \cdot \pi \cdot (80 - R)$$

$$V = \pi \cdot \left[R^2 \cdot (90 - R) - \left(R^2 - 20R + 100\right) \cdot (80 - R)\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[90R^2 - R^3 - \left(80R^2 - R^3 - 1600R + 20R^2 + 8000 - 100R\right)\right]$$

$$V = \pi \cdot \left(-10R^2 + 1700R - 8000\right)$$

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Mit der Vorgabe $10 < R \leq 55$ soll die Funktion $V : R \mapsto V(R)$ den absolut größten Wert annehmen. Berechnen Sie für diesen Fall die maximale Füllhöhe des Planschbeckens.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Extremwertaufgabe

$V(R) = \pi \cdot \left(-10R^2 + 1700R - 8000\right)$

$10 < R \leq 55 \quad \Rightarrow \quad D_V =]10; 55]$ (Definitionsmenge)

Erste Ableitung bilden: $V'(R) = \pi \cdot (-20R + 1700)$

Erste Ableitung gleich Null setzen: $V'(R) = 0$

$0 = -20R + 1700 \quad \Rightarrow \quad R^E = 85 \notin D_V$

Randbetrachtung:

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{R \to 10^+} V(R) & = & 8000\pi \\ V(55) & = & 55250\pi \end{array}\right\} \quad \text{absolutes größtes Volumen bei } R = 55$$

Einsetzen in Nebenbedingung $h = 90 - R$ aus 4.1: $h = 90 - 55 = 35$

max. Füllhöhe: $35 - 10 = 25$