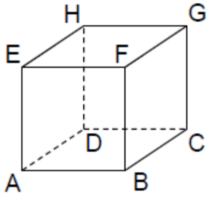
Abitur 2016 Mathematik Geometrie V

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$.
Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Der Punkt P liegt auf der Kante $[FB]$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P.

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$]

Spiegelt man die Punkte A, B und C am Symmetriezentrum $Z(3|3|3)$, so erhält man die Punkte A', B' bzw. C'.

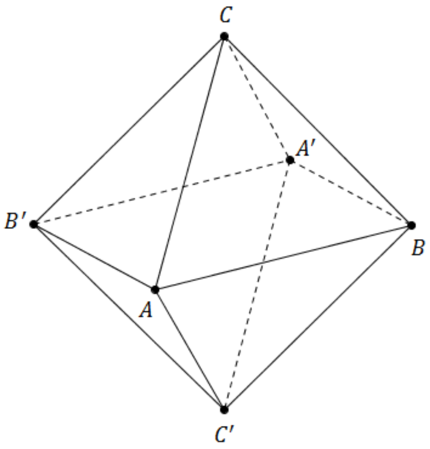
Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Beschreiben Sie die Lage der Ebene, in der die Punkte A, B und Z liegen, im Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass die Strecke $[CC']$ senkrecht auf dieser Ebene steht.

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Begründen Sie, dass das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

Der Körper $ABA'B'CC'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $ABA'B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C bzw. C'.



Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.

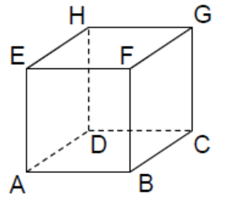
Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.
Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

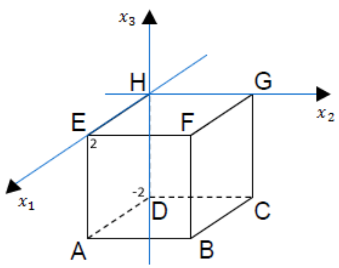
Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$.
Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Skizze



Koordinaten von Punkten ermitteln

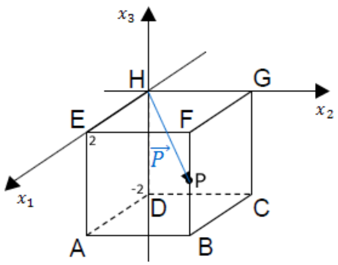
$A(2|0|-2)$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Der Punkt P liegt auf der Kante $[FB]$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Länge eines Vektors



> Erläuterung: *Punktkoordinaten*
>
> Der Punkt P hat die gleiche x_1- und x_2-Koordinate wie der Punkt F. Seine x_3-Koordinate muss negativ sein, da er auf der Kante $[FB]$ liegt.

Koordinaten des Punktes P: $\quad P(2|2|\lambda)$ mit $\lambda < 0$

Es gilt: $\quad \left|\overrightarrow{P}\right| = 3$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{P}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + \lambda^2} = \sqrt{8 + \lambda^2}$$

$$\sqrt{8+\lambda^2} = 3 \qquad |^2$$

$$8 + \lambda^2 = 9$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \qquad (\lambda_2 = 1)$$

$$\Rightarrow \quad P(2|2|-1)$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Koordinaten von Punkten ermitteln

Es soll gelten: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = 2 \cdot \left[\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\right] \qquad | \text{ nach } \overrightarrow{C} \text{ umstellen}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - 2 \cdot \left[\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\right]$$

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C(2|3|0)$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

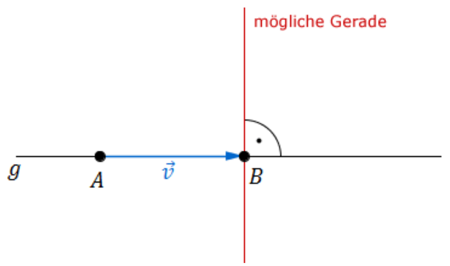
Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Geradengleichung aufstellen



Richtungsvektor der Geraden g: $\quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Möglicher Richtungsvektor der Geraden: $\quad \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Begründung: $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0$

Geradengleichung einer der Geraden:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Wenn B als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden l.

$$h: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{B}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g schneidet die Gerade h im Punkt B, und da $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + +1 + 4} = \sqrt{9} = 3$, ist der Abstand der Geraden vom Punkt A gleich 3.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

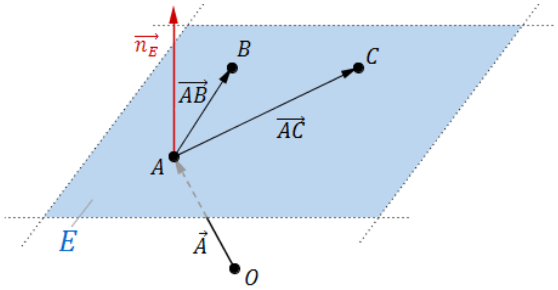
In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Ebene aus drei Punkte



Richtungsvektoren der Ebene E:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A(6|3|3)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 0 \\ 0 - (-3) \cdot 3 \\ 0 - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen. Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 9 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A}}$$

$E : x_1 + x_2 + x_3 = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1$

$E : x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Spiegelt man die Punkte A, B und C am Symmetriezentrum $Z(3|3|3)$, so erhält man die Punkte A', B' bzw. C'.

Beschreiben Sie die Lage der Ebene, in der die Punkte A, B und Z liegen, im Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass die Strecke $[C\,C']$ senkrecht auf dieser Ebene steht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

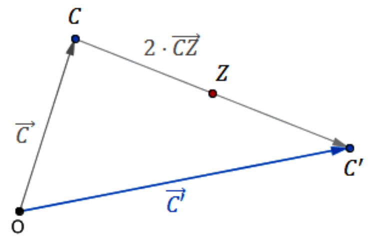
Lagebeziehung von Ebenen

$A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$, $C(3|3|6)$, $Z(3|3|3)$

Die x_3-Koordinaten der Punkte A, B und Z sind alle gleich (Wert = 3).

$\Rightarrow$ Die Ebene, in der die Punkte A, B und Z liegen, ist parallel zur $x_1\,x_2$-Ebene

Spiegelpunkt



$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{C} + 2 \cdot \overrightarrow{C\,Z}$

$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{C} + 2 \cdot \left[\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{C}\right]$

$$\overrightarrow{C'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{C\,C'} = \overrightarrow{C'} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Parallele Vektoren*

Zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ sind genau dann parallel, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.
Also genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{C\,C'}$ ist parallel zum Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der $x_1\,x_2$-Ebene

Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf diese Ebene.

Ein zum Normalenvektor paralleler Vektor steht somit auch senkrecht auf diese Ebene.

$\Rightarrow \quad [C\,C']$ steht senkrecht auf der Ebene

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Begründen Sie, dass das Viereck $A\,B\,A'\,B'$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Eigenschaften eines Parallelogramms

Das Viereck $A\,B\,A'\,B'$ ist wegen seiner Konstruktion punktsymmetrisch und somit ein Parallelogramm.

Spiegelpunkt

$A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$, $Z(3|3|3)$

Der Punkt B' lässt sich analog zum Punkt C' aus Teilaufgabe Teil B b bestimmen:

$$\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B} + 2 \cdot \overrightarrow{B\,Z}$$

$$\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B} + 2 \cdot \left[\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{B}\right]$$

$$\overrightarrow{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{A\,B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A\,B'} = \overrightarrow{B'} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{A\,B}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{A\,B'}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \quad$ Alle Seiten sind gleich lang

Lagebeziehung von Vektoren

$$\overrightarrow{A\,B} \circ \overrightarrow{A\,B'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 - 9 + 0 = 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

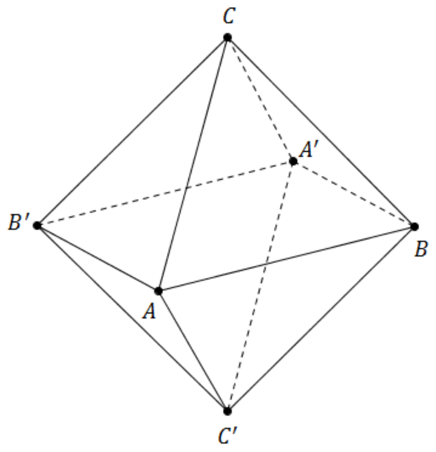
$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A\,B} \perp \overrightarrow{A\,B'}$

$\Rightarrow \quad A\,B\,A'\,B'$ ist ein Quadrat

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Der Körper $A\,B\,A'\,B'\,C\,C'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $A\,B\,A'\,B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C

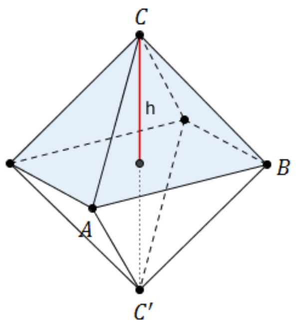
bzw. C'.



Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Volumen einer Pyramide

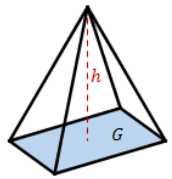


$C(3|3|6)$, $C(3|3|0)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}$ (s. Teil B Teilaufgabe c)

$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot V_{\text{Pyramide}}$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Erläuterung:

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenfläche $\overline{AB}$.

$[CC']$ steht senkrecht auf die Grundfläche, deswegen entspricht die Höhe der Pyramide der Hälfte der Strecke $[CC']$.

$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{CC}}{2}$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Punkte C und C' unterscheiden sich nur in der x_3-Koordinate. Ihr Abstand ist also gleich 6.

Alternativ:

$$\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{CC'}\right| = \sqrt{0+0+36} = 6$$

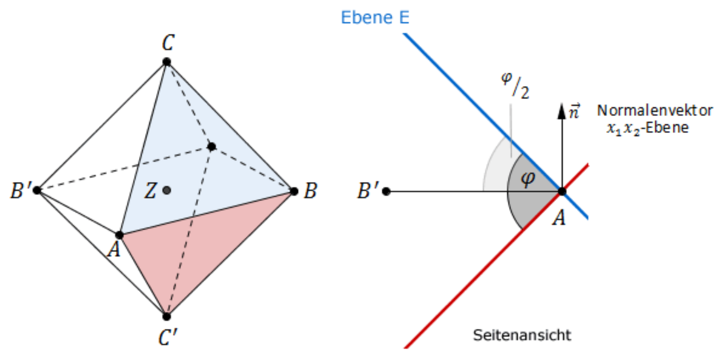
$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \frac{6}{2} = 36$$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Winkel zwischen zwei Ebenen



Erläuterung:

Begründung:

- Die Seitenfläche ABC liegt in der Ebene E (s. Teilaufgabe Teil B a).

- Die Ebene, in der die Punkte A, B und Z (Symmetriezentrum) liegen, ist parallel zur x_1x_2-Ebene (s. Teilaufgabe Teil B b).

- Die Ebene in der die Seitenfläche $AC'B$ liegt, bildet mit der x_1x_2-Ebene aus Symmetrie-Gründen den gleichen Winkel, wie die Ebene E und die x_1x_2-Ebene.

Der gesucht Winkel φ entspricht zweimal den Winkel zwischen der Ebene E (aus Teilaufgabe Teil B a) und der x_1x_2-Ebene.

Normalenvektor der Ebene E: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

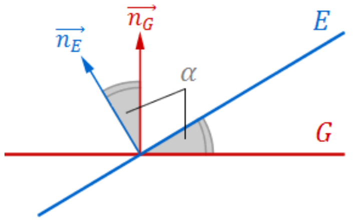
Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf diese Ebene und hat eine beliebige Länge.

Im Falle der x_1x_2-Ebene (Koordinatenebene) wählt man z.B. als Normalenvektor den Einheitsvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der auch Richtungsvektor der x_3-Achse ist.

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Seitenflächen bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,7^\circ$$

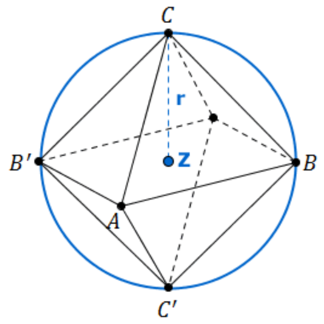
$$\Rightarrow \quad \varphi = 109,4^\circ$$

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.
Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Kugel



$Z(3|3|3)$ (Mittelpunkt der Kugel)

$r = h_{\text{Pyramide}} = 3$ (Radius der Kugel)

Erläuterung: *Kugelgleichung*

Die Gleichung einer Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r ist gegeben durch:

$$K : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{M}\right]^2 = r^2$$

$$K : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$$

Volumen einer Kugel

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

$V_{\text{Oktaeder}} = 36$

Anteil: $\dfrac{V_{\text{Oktaeder}}}{V_{\text{Kugel}}} = \dfrac{36}{36\pi} = \dfrac{1}{\pi}$