# Abitur 2015 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x)$ mit maximalem Definitionsbereich $D$.

**Teilaufgabe Teil A 1a** (1 BE)

Geben Sie $D$ an.

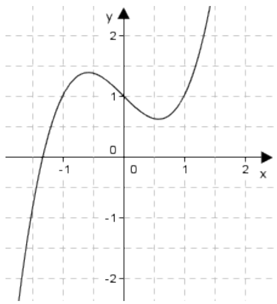
**Teilaufgabe Teil A 1b** (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f$, $g$ und $h$ mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

**Teilaufgabe Teil A 2a** (3 BE)

Das untere Bild zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.




**Teilaufgabe Teil A 2b** (2 BE)

Die erste Ableitungsfunktion von $h$ ist $h'$. Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x$.





**Teilaufgabe Teil A 3a** (1 BE)

Geben Sie einen positiven Wert für den Parameter $a$ an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \sin(a\,x)$ eine Nullstelle in $x = \frac{\pi}{6}$ hat.

**Teilaufgabe Teil A 3b** (2 BE)

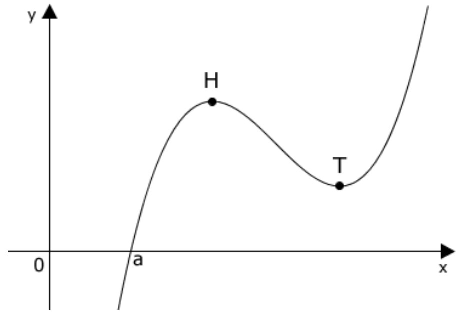
Ermitteln Sie den Wert des Parameters $b$, sodass die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - b}$ den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R}\backslash]-2;2[$ besitzt.

**Teilaufgabe Teil A 3c** (2 BE)

Erläutern Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto 4 - e^x$ den Wertebereich $]-\infty;4[$ besitzt.

**Teilaufgabe Teil A 4** (2 BE)

Das untere Bild zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion $g : x \mapsto g(x)$. Mithilfe des Newton-Verfahrens soll ein Näherungswert für die Nullstelle $a$ von $g$ ermittelt werden. Begründen Sie, dass weder die $x$-Koordinate des Hochpunkts $H$ noch die $x$-Koordinate des Tiefpunkts $T$ als Startwert des Newton-Verfahrens gewählt werden kann.




Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

**Teilaufgabe Teil A 5a** (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von $f$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

**Teilaufgabe Teil A 5b** (2 BE)

Der Graph von $f$ wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion $f$ besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion $h$. Geben Sie eine Gleichung von $h$ an.

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}$ und Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$. Der Graph von $f$ wird mit $G_f$ bezeichnet.

**Teilaufgabe Teil B 1a** (4 BE)

Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Term äquivalent ist:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}\ ;\ \frac{2}{x^2+4x+3}\ ;\ \frac{1}{0,5\cdot(x+2)^2-0,5}$$

**Teilaufgabe Teil B 1b** (3 BE)

Begründen Sie, dass die $x$-Achse horizontale Asymptote von $G_f$ ist, und geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von $G_f$ an. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von $G_f$ mit der $y$-Achse.





Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p : x \mapsto 0,5\cdot(x+2)^2 - 0,5$, die die Nullstellen $x = -3$ und $x = -1$ hat.
Für $x \in D_f$ gilt $f(x) = \dfrac{1}{p(x)}$.

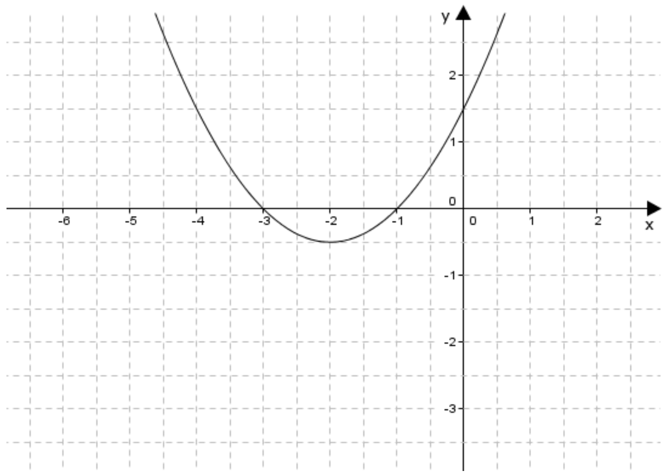



Abb. 1

**Teilaufgabe Teil B 1c** (5 BE)

Gemäß der Quotientenregel gilt für die Ableitungen $f'$ und $p'$ die Beziehung $f'(x) = -\dfrac{p'(x)}{(p(x))^2}$ für $x \in D_f$.
Zeigen Sie unter Verwendung dieser Beziehung und ohne Berechnung von $f'(x)$ und $p'(x)$, dass $x = -2$ einzige Nullstelle von $f'$ ist und dass $G_f$ in $]-3; -2[$ streng monoton steigend sowie in $]-2; -1[$ streng monoton fallend ist. Geben Sie Lage und Art des Extrempunkts von $G_f$ an.

**Teilaufgabe Teil B 1d** (4 BE)

Berechnen Sie $f(-5)$ und $f(-1,5)$ und skizzieren Sie $G_f$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1.

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto \dfrac{3}{e^{x+1}-1}$ mit Definitionsbereich $D_h = ]-1; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen $G_h$ von $h$.

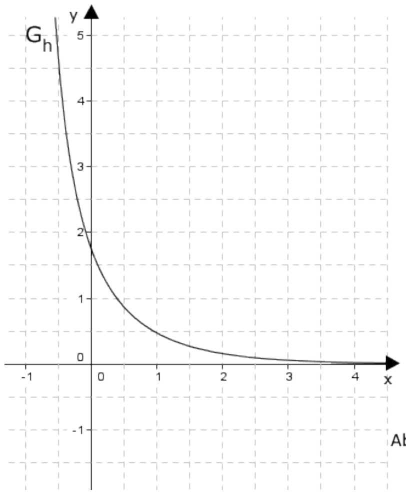


Abb. 2

**Teilaufgabe Teil B 2a** (4 BE)

Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ gilt. Zeigen Sie rechnerisch für $x \in D_h$, dass für die Ableitung $h'$ von $h$ gilt: $h'(x) < 0$.

Gegeben ist ferner die in $D_h$ definierte Integralfunktion $H_0 : x \mapsto \int\limits_0^x h(t)\ \mathrm{d}t$.

**Teilaufgabe Teil B 2b** (4 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Aussagen wahr sind:
$\alpha$) Der Graph von $H_0$ ist streng monoton steigend.
$\beta$) Der Graph von $H_0$ ist rechtsgekrümmt.





**Teilaufgabe Teil B 2c** (6 BE)

Geben Sie die Nullstelle von $H_0$ an und bestimmen Sie näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $H_0(-0,5)$ sowie $H_0(3)$. Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen von $H_0$ im Bereich $-0,5 \leq x \leq 3$.

In einem Labor wird ein Verfahren zur Reinigung von mit Schadstoffen kontaminiertem Wasser getestet. Die Funktion $h$ aus Aufgabe 2 beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffabbaus in einer bestimmten Wassermenge. Dabei bezeichnet $h(x)$ die momentane Schadstoffabbaurate in Gramm pro Minute und $x$ die seit Beginn des Reinigungsvorgangs vergangene Zeit in Minuten.

**Teilaufgabe Teil B 3a** (3 BE)

Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Zeitpunkt $x$, zu dem die momentane Schadstoffabbaurate auf $0,01$ Gramm pro Minute zurückgegangen ist.

Die in $\mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$ definierte Funktion $k : x \mapsto 3 \cdot \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right) - 0,2$ stellt im Bereich $-0,5 \leq x \leq 2$ eine gute Näherung für die Funktion $h$ dar.

**Teilaufgabe Teil B 3b** (2 BE)

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion $k$ aus dem Graphen der Funktion $f$ aus Aufgabe 1 hervorgeht.

**Teilaufgabe Teil B 3c** (5 BE)

Berechnen Sie einen Näherungswert für $\int\limits_0^1 h(x)\ \mathrm{dx}$, indem Sie den Zusammenhang $\int\limits_0^1 h(x)\ \mathrm{dx} \approx \int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx}$ verwenden. Geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

## Lösung

### Teilaufgabe Teil A 1a (1 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x)$ mit maximalem Definitionsbereich $D$.

Geben Sie $D$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

***Definitionsbereich bestimmen***

$f(x) = \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x)$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> Die Logarithmusfunktion $\ln x$ ist nur für positive $x$-Werte definiert.
>
> Ihr Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}^+ = ]0; +\infty[$.

Definitionsbereich von $\ln x$: $\quad \mathbb{R}^+ = ]0; +\infty[$

$\Rightarrow \quad D = \mathbb{R}^+$

### Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

***Nullstellen einer Funktion***

$f(x) = \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x)$





> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion $f$ mit der $x$-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach $x$ aufgelöst werden.

Ansatz: $\quad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x) = 0$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme $a$ und $b$ ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

1) $x^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$

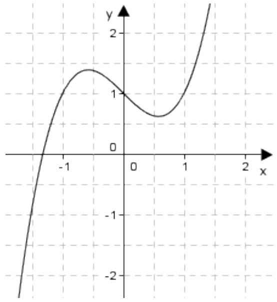
> Erläuterung: *Rechenweg*
>
> $\ln x = -2 \qquad | \; e^x$
>
> $e^{\ln x} = e^{-2}$
>
> $x = e^{-2}$

2) $2 + \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = e^{-2}$

### Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f$, $g$ und $h$ mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Das untere Bild zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.




Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

***Eigenschaften einer Funktion***

Im Bild ist der Graph der Funktion $g$ zu sehen, da der Graph der Funktion $f$ nur ein Extremum besitzt (quadratische Funktion) und der Graph der Funktion $h$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist ($h(-x) = h(x)$).

**Teilaufgabe Teil A 2b** (2 BE)

Die erste Ableitungsfunktion von $h$ ist $h'$. Bestimmen Sie den Wert von $\displaystyle\int_0^1 h'(x)\ \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

***Bestimmtes Integral***

$h(x) = x^4 + x^2 + 1$





Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In diesem Fall ist $h$ eine Stammfunktion von $h'$.

$$\int_0^1 h'(x)\ \mathrm{dx} = \left[x^4 + x^2 + 1\right]_0^1 = 3 - 1 = 2$$

**Teilaufgabe Teil A 3a** (1 BE)

Geben Sie einen positiven Wert für den Parameter $a$ an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \sin(a\,x)$ eine Nullstelle in $x = \frac{\pi}{6}$ hat.

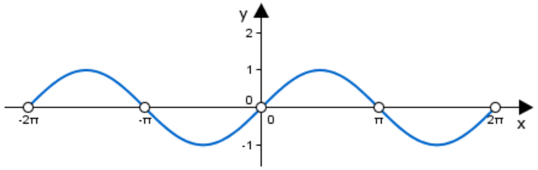
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

***Nullstellen einer Funktion***

$\frac{\pi}{6}$ ist z.B. für $a = 6$ eine Nullstelle von $f(x) = \sin(a\,x)$.

Erläuterung: *Nullstellen der Sinusfunktion*

Graph der Sinusfunktion $\sin x$ zwischen $-2\pi$ und $2\pi$ :




Die Nullstellen der Sinusfunktion, sprich die Schnittpunkte der Funktion mit der $x$-Achse, wiederholen sich periodisch.

Nullstellen: $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi ...$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi) = 0$$

**Teilaufgabe Teil A 3b** (2 BE)

Ermitteln Sie den Wert des Parameters $b$, sodass die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - b}$ den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R} \backslash ]-2; 2[$ besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

***Definitionsbereich bestimmen***

$$g(x) = \sqrt{x^2 - b}$$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$g(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $x^2 - b$, muss größer oder gleich Null sein.

$$x^2 - b \geq 0$$





$$x^2 \geq b$$

$$\pm x \geq \sqrt{b}$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$-x \geq \sqrt{b} \qquad | \cdot (-1)$

(da die Ungleichung mit eine negative Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$x \leq -\sqrt{b}$

$$\Rightarrow \quad x \geq \sqrt{b} \quad \text{und} \quad x \leq -\sqrt{b}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left]-\sqrt{b}; \sqrt{b}\right[$$

$$\sqrt{b} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

**Teilaufgabe Teil A 3c** (2 BE)

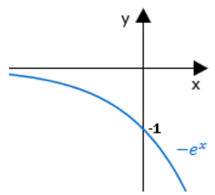
Erläutern Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto 4 - e^x$ den Wertebereich $]-\infty; 4[$ besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3c

***Wertebereich bestimmen***

$$h(x) = 4 - e^x \;, \qquad W_h = ]-\infty; 4[$$

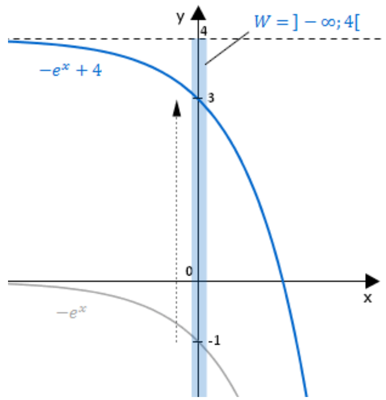
Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*




Die Exponentialfunktion $-e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets negativ.

Der Wertebereich der Funktion $-e^x$ ist $W = ]-\infty; 0[$.

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*




Der Graph der Funktion $h$ entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion $-e^x$ entlang der $y$-Achse um 4 Einheiten nach oben.

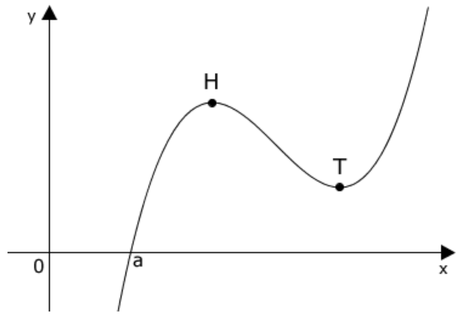
$\Rightarrow \quad W_h = ]-\infty; 4[$





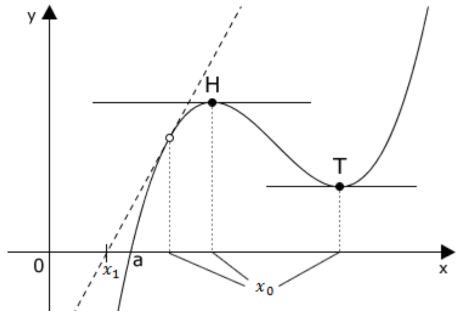
**Teilaufgabe Teil A 4** (2 BE)

Das untere Bild zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion $g : x \mapsto g(x)$. Mithilfe des Newton-Verfahrens soll ein Näherungswert für die Nullstelle $a$ von $g$ ermittelt werden. Begründen Sie, dass weder die $x$-Koordinate des Hochpunkts $H$ noch die $x$-Koordinate des Tiefpunkts $T$ als Startwert des Newton-Verfahrens gewählt werden kann.




## Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4

***Newton-Verfahren***




Begründung:

Beim Newton-Verfahren werden Tangenten an den Graphen gelegt.
Sowohl im Hoch- als auch im Tiefpunkt sind die Tangenten waagerecht und liefern somit keinen Schnittpunkt mit der $x$-Achse.

Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt mit Startwert $x_0$ gilt somit: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Oder:

$$x_1 = x_0 - \frac{f\ (x_0)}{f'\ (x_0)}$$

Wenn $f'\ (x_0) = 0$, dann ist $x_1$ nicht definiert.

**Teilaufgabe Teil A 5a** (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von $f$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5a**

***Wendepunkt ermitteln***

Erste und zweite Ableitung bilden:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f''(x) = 6x - 12$$





Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle $x^W$ erfüllt sein:

$f''\left(x^W\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f''(x) = 0$

Zweite Ableitung gleich Null setzen: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = 2$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion $f$ gleich Null an einer Stelle $x^{\text{WP}}$, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle $x^{\text{WP}}$ vor.

$f'''(x) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^W = 2$ ist Wendestelle

$y$-Koordinate des Wendepunkts ermitteln:

$y^W = f(2) = 0$

Koordinaten des Wendepunkts in die Geradengleichung einsetzen:

$0 = 2 - 2$ (wahre Aussage)

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Koordinaten des Wendepunkts erfüllen die Geradengleichung. Der Wendepunkt liegt somit auf der Geraden.

$\Rightarrow \quad W(2|0)$ liegt auf der Geraden $y = x - 2$

**Teilaufgabe Teil A 5b** (2 BE)

Der Graph von $f$ wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion $f$ besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion $h$. Geben Sie eine Gleichung von $h$ an.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil A 5b

***Verschiebung von Funktionsgraphen***

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Erläuterung:

Der Punkt $(2|0)$ wird zum Punkt $(3|2)$, falls die $x$-Koordinate um 1 und die $y$-Koordinate um 2 erhöht wird.

Verschiebung entlang der $x$-Achse um 1 Einheit nach rechts und entlang der $y$-Achse um 2 Einheiten nach oben:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

**Verschiebung entlang der $x$-Achse um $a$ Einheiten**:

nach rechts (positive $x$-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x-a)$

nach links (negative $x$-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x+a)$

In diesem Fall ist $a = 1$: $f(x) \rightarrow f(x-1)$

**Verschiebung entlang der $y$-Achse um $b$ Einheiten**:

nach oben (positive $y$-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x) + b$

nach unten (negative $y$-Richtung): $f(x) \rightarrow f(x) - b$

In diesem Fall ist $b = 2$: $f(x) \rightarrow f(x) + 2$

Beide Verschiebungen hintereinander: $f(x) \rightarrow f(x-1) \rightarrow f(x-1) + 2$

$h(x) = f(x-1) + 2$

$h(x) = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 11(x-1) - 6 + 2$





## Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}$ und Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$. Der Graph von $f$ wird mit $G_f$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Term äquivalent ist:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}\;;\;\frac{2}{x^2+4x+3}\;;\;\frac{1}{0,5\cdot(x+2)^2-0,5}$$

## Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

***Termumformung***

1. Hauptnenner bilden:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{x+3-x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

Erläuterung:

Man formt hier den bereit unter Punkt 1 bestätigten Term $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$ weiter um.

2. Terme im Nenner ausmultiplizieren:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{x^2+3x+x+3} = \frac{2}{x^2+4x+3}$$

Erläuterung:

Hier wird rückwärts umgeformt, also ausgehend vom Term $\dfrac{1}{0,5\cdot(x+2)^2-0,5}$ wird gezeigt, dass dieser gleich ist zu $\dfrac{2}{x^2+4x+3}$.

3. Binomische Formel anwenden und zusammenfassen:

$$\frac{1}{0,5\cdot(x+2)^2-0,5} = \frac{2}{(x+2)^2-1} = \frac{2}{x^2+4x+4-1} = \frac{2}{x^2+4x+3}$$

**Teilaufgabe Teil B 1b** (3 BE)

Begründen Sie, dass die $x$-Achse horizontale Asymptote von $G_f$ ist, und geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von $G_f$ an. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von $G_f$ mit der $y$-Achse.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b**

***Asymptoten bestimmen***

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{0,5\cdot(x+2)^2-0,5} \qquad \text{(s. Teil B 1a)}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3;-1\}$

Erläuterung: *Asymptoten, Grenzwert*

Um die Asymptoten einer Funktion zu bestimmen, untersucht man das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und an den Definitionslücken. Dazu bildet man die Grenzwerte.

Der Einfachheit halber verwenden wir für die Bildung der Grenzwert die in Teilaufgabe Teil B 1a bestätigten äquivalenten Funktionsterme von $f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\underbrace{x^2}_{\to\infty} + \underbrace{4x}_{\to\infty} + 3}_{\to\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{0,5\cdot\underbrace{(x+2)^2}_{\to\infty} - 0,5}_{\to+\infty}} = 0$$

$\Rightarrow \quad y = 0$ (x-Achse) ist horizontale Asymptote





Gleichungen der vertikalen Asymptoten:

Erläuterung: *Senkrechte Asymptoten*

Die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$ hat Definitionslücken an den Stellen $x = -1$ und $x = -3$ (Nullstellen des Nenners).

Eine senkrechte Asymptote liegt genau dann vor, wenn die Nullstelle des Nenners nicht auch Nullstelle des Zählers ist. Also sind in diesem Fall $x = -1$ und $x = -3$ senkrechte Asymptoten.

Der rechnerische Beweis erfolgt über die Bildung der links- und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) = \lim_{x\to-1^\pm} \frac{2}{\underbrace{\underbrace{(x+1)}_{\to0^\pm}\underbrace{(x+3)}_{\to2}}_{\to0^\pm}} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \text{(vertikale Asymptote)}$$

$$\lim_{x\to-3^\pm} f(x) = \lim_{x\to-3^\pm} \frac{2}{\underbrace{\underbrace{(x+1)}_{\to-2}\underbrace{(x+3)}_{\to0^\pm}}_{\to0^\mp}} = \mp\infty \quad \Rightarrow \quad x=-3 \quad \text{(vertikale Asymptote)}$$

$x = -1;\ x = -3$

***Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen***

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*

Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der $y$-Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

$$f(0) = \frac{2}{0+0+3} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_y\left(0\middle|\frac{2}{3}\right)$$

**Teilaufgabe Teil B 1c** (5 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p : x \mapsto 0,5 \cdot (x+2)^2 - 0,5$, die die Nullstellen $x = -3$ und $x = -1$ hat.
Für $x \in D_f$ gilt $f(x) = \dfrac{1}{p(x)}$.

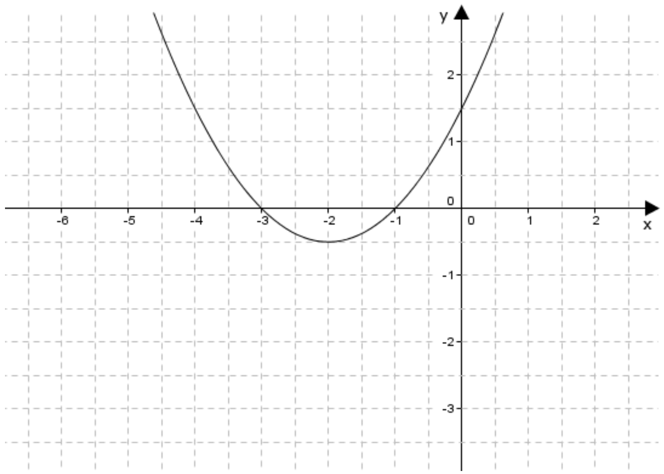



Abb. 1

Gemäß der Quotientenregel gilt für die Ableitungen $f'$ und $p'$ die Beziehung $f'(x) = -\dfrac{p'(x)}{(p(x))^2}$ für $x \in D_f$.
Zeigen Sie unter Verwendung dieser Beziehung und ohne Berechnung von $f'(x)$ und $p'(x)$, dass $x = -2$ einzige Nullstelle von $f'$ ist und dass $G_f$ in $]-3;-2[$ streng monoton steigend sowie in $]-2;-1[$ streng monoton fallend ist. Geben Sie Lage und Art des Extrempunkts von $G_f$ an.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c**

***Nullstellen einer Funktion***

Der Graph von $p(x)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S(-2|-0,5)$.

$$\Rightarrow \quad p'(-2) = 0$$





$$\Rightarrow \quad f'(-2) = -\frac{\overbrace{p'(-2)}^{0}}{(p(-2))^2} = 0$$

Da $G_p$ nur ein Extrempunkt hat, hat $f'$ nur eine einzige Nullstelle.

***Monotonieverhalten einer Funktion***

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv, wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\dfrac{3}{5} > 0$ oder $\dfrac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ, wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\dfrac{-3}{5} < 0$ oder $\dfrac{3}{-5} < 0$).

In diesem Fall ist der Nenner $(p(x))^2$ wegen dem Quadrat immer positiv.

Der Bruch ist somit positiv, falls der Zähler $-p'(x)$ auch positiv ist:

$$-p'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad p'(x) < 0$$

Der Bruch ist somit negativ, falls der Zähler $-p'(x)$ auch negativ ist:

$$-p'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad p'(x) > 0$$

$$\{ \begin{array}{l} f'(x) = -\frac{p'(x)}{\underbrace{(p(x))^2}_{>0}} > 0 \quad , \quad \text{falls} \quad p'(x) < 0 \\ f'(x) = -\frac{p'(x)}{\underbrace{(p(x))^2}_{>0}} < 0 \quad , \quad \text{falls} \quad p'(x) > 0 \end{array}$$

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Die Steigung des Graphen einer Funktion $g$ an der Stelle $x$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle $x$.

Der Graph der Funktion $p$ (s. Abbildung 1) ist im Bereich $]-3;-2[$ streng monoton fallend, also ist die erste Ableitung $p'$ dort negativ. Im Bereich $]-2;-1[$ ist der Graph streng monoton steigend, also ist $p'$ dort postiv.

$$\text{Da} \quad \left\{ \begin{array}{l} p'(x) < 0 \quad , \quad \text{für} \quad x \in ]-3;-2[ \\ p'(x) > 0 \quad , \quad \text{für} \quad x \in ]-2;-1[ \end{array} \right.$$

$$\text{folgt} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad , \quad \text{für} \quad x \in ]-3;-2[ \\ f'(x) < 0 \quad , \quad \text{für} \quad x \in ]-2;-1[ \end{array} \right.$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist für $x \in ]-3;-2[$ streng monoton steigend

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist für $x \in ]-2;-1[$ streng monoton fallend

***Lage von Extrempunkten ermitteln***

$x^E = -2$

$$y^E = f\left(x^E\right) = f(-2) = \frac{2}{(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3} = -2$$

$\Rightarrow \quad E(-2|-2)$

***Art von Extrempunkten ermitteln***

$E(-2|-2)$ ist ein Hochpunkt.





Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle $x^E$ vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle $x^E$ vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

**Teilaufgabe Teil B 1d** (4 BE)

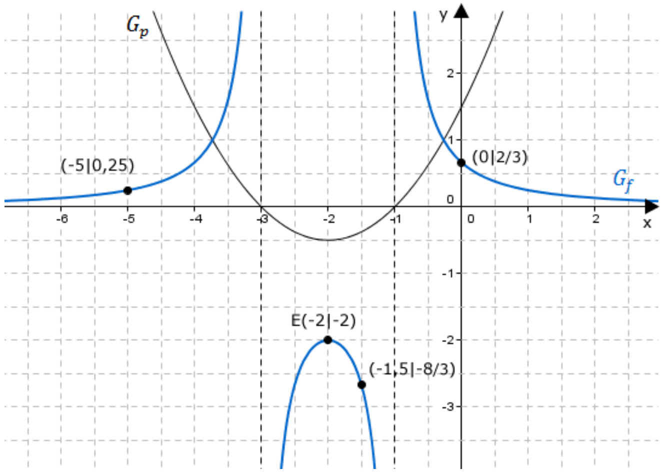
Berechnen Sie $f(-5)$ und $f(-1,5)$ und skizzieren Sie $G_f$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d**

***Skizze***

$f(-5) = 0,25$

$f(-1,5) = -\dfrac{8}{3}$




**Teilaufgabe Teil B 2a** (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto \dfrac{3}{e^{x+1} - 1}$ mit Definitionsbereich $D_h = ]-1; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen $G_h$ von $h$.





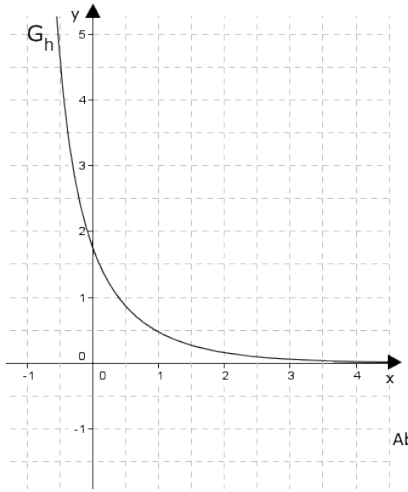



Abb. 2

Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ gilt. Zeigen Sie rechnerisch für $x \in D_h$, dass für die Ableitung $h'$ von $h$ gilt: $h'(x) < 0$.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a**

***Grenzwert bestimmen***

$$h(x) = \frac{3}{e^{x+1} - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\underbrace{\underbrace{e^{x+1}}_{\to +\infty} - 1}_{\to +\infty}} = 0$$

***Steigung eines Funktionsgraphen***

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 3$ und $v(x) = e^{x+1} - 1$ .
Dann ist $u'(x) = 0$ und $v'(x) = e^{x+1}$ .

Bemerkung: für die Ableitung der Exponentialfunktion $v(x)$ wird die Kettenregel verwendet.

Kettenregel:

$$v(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{0\cdot\left(e^{x+1}-1\right) - 3\cdot e^{x+1}}{\left(e^{x+1}-1\right)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-3\cdot e^{x+1}}{\left(e^{x+1}-1\right)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:





Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

In diesem Fall ist:

- der Zähler $-3\cdot e^{x+1}$ negativ für alle $x \in D_h$, da $-3$ eine negative Zahl und die Exponentialfunktion $e^{x+1}$ stets positiv ist.

- der Nenner $\left(e^{x+1}-1\right)^2$ positiv für alle $x \in D_h$, da er eine „quadratische" Funktion ist.

Die erste Ableitung ist somit negativ für alle $x \in D_h$.

$$h'(x) = \frac{\overbrace{-3\cdot \overbrace{e^{x+1}}^{>0}}^{<0}}{\underbrace{\left(e^{x+1}-1\right)^2}_{>0}} < 0$$

**Teilaufgabe Teil B 2b** (4 BE)

Gegeben ist ferner die in $D_h$ definierte Integralfunktion $H_0 : x \mapsto \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Aussagen wahr sind:
$\alpha$) Der Graph von $H_0$ ist streng monoton steigend.
$\beta$) Der Graph von $H_0$ ist rechtsgekrümmt.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b**

***Monotonieverhalten der Integralfunktion***

$\alpha$)

$$H_0(x) = \int_0^x h(t)\mathrm{dt}$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{ist Integralfunktion von } f(x) \text{, d.h.:}$$

$F_a(a) = 0$
($a$ ist ist Nullstelle der Integralfunktion, da $a$ Integrationsanfang)

$F_a'(x) = f(x)$
(Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion $f(x)$)

$F_a(x)$ ist stetig, wenn es $f(x)$ auch ist.

$H_0'(x) = h(x)$

Erläuterung:

In Abbildung 2 ist zu erkennen, dass der Graph der Funktion $h$ oberhalb der $x$-Achse verläuft.

Aus $h(x) > 0$ für alle $x \in D_h$ folgt: $\quad H_0'(x) > 0$ für alle $x \in D_h$

Erläuterung: *Monotonieverhalten der Integralfunktion*

Da $h(x)$ stetig ist und $H_0'(x) = h(x)$, folgt:

Dort wo $h$ negativ ist, ist es $H_0'$ auch und $H_0$ ist somit streng monoton fallend.

Dort wo $h$ positiv ist, ist es $H_0'$ auch und $H_0$ ist somit streng monoton steigend.

Wo $h$ Nullstellen hat, hat $H_0$ waagerechte Tangenten (Extrema oder Wendepunkte/Terrassenpunkte)

$\Rightarrow \quad H_0(x)$ ist für streng monoton steigend





***Krümmungsverhalten der Integralfunktion***

$\beta$)

$H_0''(x) = h'(x)$

Erläuterung:

In Teilaufgabe Teil B 2a wurde gezeigt, dass $h'(x) < 0$ für alle $x \in D_h$.

Aus $h'(x) < 0$ für alle $x \in D_h$ folgt: $\quad H_0''(x) < 0$ für alle $x \in D_h$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion $f$ negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in ]a;b[$, so ist der Graph der Funktion $G_f$ in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion $f$ positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in ]a;b[$, so ist der Graph der Funktion $G_f$ in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion $f$ gleich Null an einer Stelle $x^W$, d.h. $f''\left(x^W\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle $x^W$ vor.

$\Rightarrow \quad G_{H_0}$ ist rechtsgekürmmt

**Teilaufgabe Teil B 2c** (6 BE)

Geben Sie die Nullstelle von $H_0$ an und bestimmen Sie näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $H_0(-0,5)$ sowie $H_0(3)$. Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen von $H_0$ im Bereich $-0,5 \leq x \leq 3$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

***Eigenschaften der Integralfunktion***

$$H_0(x) = \int_0^x h(t)\mathrm{d}t$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze $a$ (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$\Rightarrow \quad x^N = 0 \quad$ (Nullstelle)

***Funktionswerte der Integralfunktion angeben***

Ablesen der Funktionswerte mit Hilfe des Gitternetzes:

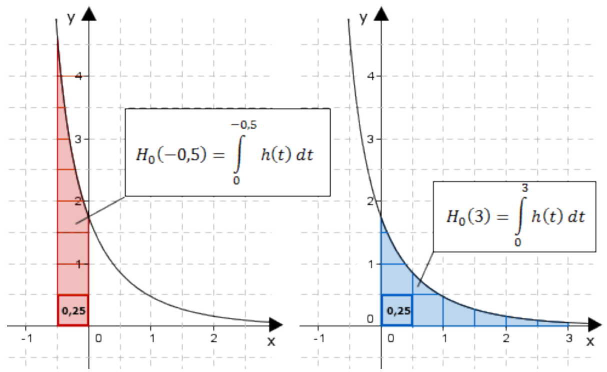




Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int_0^{-0,5} h(t)\ \mathrm{dt}$ bzw. $\int_0^3 h(t)\ \mathrm{dt}$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die der Graph $G_h$ mit der $x$-Achse zwischen 0 und $-0,5$ bzw. 0 und 3 einschließt.

Beim Integral $\int_0^{-0,5} h(t)\ \mathrm{dt}$ ist der Integrationsweg negativ. Obwohl die Fläche oberhalb der $x$-Achse liegt, ist der Wert des Integrals hier negativ.




Mit Hilfe des Gitternetzes kann diese Fläche näherungsweise abgezählt werden. Ein „Kästchen“ entspricht $0,25$ Flächeneinheiten.

$H_0(-0,5) \approx -1,4$
$H_0(3) \approx 1,3$

***Skizze***

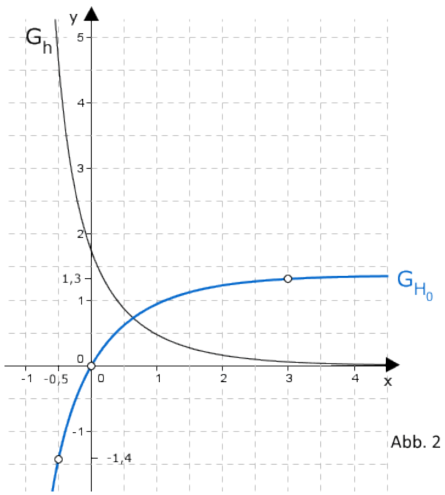



Abb. 2

**Teilaufgabe Teil B 3a** (3 BE)

In einem Labor wird ein Verfahren zur Reinigung von mit Schadstoffen kontaminiertem Wasser getestet. Die Funktion $h$ aus Aufgabe 2 beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffabbaus in einer bestimmten Wassermenge. Dabei bezeichnet $h(x)$ die momentane Schadstoffabbaurate in Gramm pro Minute und $x$ die seit Beginn des Reinigungsvorgangs vergangene Zeit in Minuten.

Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Zeitpunkt $x$, zu dem die momentane Schadstoffabbaurate auf $0,01$ Gramm pro Minute zurückgegangen ist.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3a**

***Exponentialgleichung***

$$h(x) = \frac{3}{e^{x+1}-1}$$

$$\frac{3}{e^{x+1}-1} = 0,01$$





$$\frac{3}{e^{x+1}-1} = \overbrace{\frac{3}{300}}^{0,01}$$

$$e^{x+1} - 1 = 300$$

$$e^{x+1} = 301 \qquad |\ \text{logarithmieren}$$

$$\ln e^{x+1} = \ln 301$$

$$x + 1 = \ln 301$$

$$x = -1 + \ln 301$$

$$x \approx 4,7 \text{ Minuten}$$

**Teilaufgabe Teil B 3b** (2 BE)

Die in $\mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$ definierte Funktion $k : x \mapsto 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0,2$ stellt im Bereich $-0,5 \leq x \leq 2$ eine gute Näherung für die Funktion $h$ dar.

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion $k$ aus dem Graphen der Funktion $f$ aus Aufgabe 1 hervorgeht.

**Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3b**

***Verschiebung von Funktionsgraphen***

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$$

1) $f(x) \rightarrow 3 \cdot f(x)$
Streckung entlang der $y$-Achse mit Faktor 3.

2) $3 \cdot f(x) \rightarrow 3 \cdot f(x) - 0,2$
Anschließende Verschiebung entlang der y-Achse um 0,2 Einheiten nach unten.

**Teilaufgabe Teil B 3c** (5 BE)

Berechnen Sie einen Näherungswert für $\int\limits_0^1 h(x)\ \mathrm{dx}$, indem Sie den Zusammenhang $\int\limits_0^1 h(x)\ \mathrm{dx} \approx \int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx}$ verwenden. Geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil B 3c

***Bestimmtes Integral***

$$k(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0,2$$

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} = \int\limits_0^1 \left[3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) - 0,2\right]\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gelten folgende Rechenregeln für Integrale:

$$\int\limits_a^b c \cdot f(x)\ \mathrm{dx} = c \cdot \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\ \mathrm{dx} = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{dx} + \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} = \int\limits_0^1 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)\ \mathrm{dx} - \int\limits_0^1 0,2\ \mathrm{dx}$$





Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale, Ausklammern*

Allgemein gelten folgende Rechenregeln für Integrale:

$$\int\limits_a^b c \cdot f(x)\ \mathrm{dx} = c \cdot \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\ \mathrm{dx} = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{dx} + \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} = 3 \cdot \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)\ \mathrm{dx} - \int\limits_0^1 0,2\ \mathrm{dx}$$

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} = 3 \cdot \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\ \mathrm{dx} - \int\limits_0^1 \frac{1}{x+3}\ \mathrm{dx}\right) - \int\limits_0^1 0,2\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{x+1}$ und $\frac{1}{x+3}$ (siehe auch Merkhilfe Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ \mathrm{dx} = \ln|g(x)| + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x+1}\ \mathrm{dx} = \ln\ |x+1|$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x+3}\ \mathrm{dx} = \ln\ |x+3|$$

Die Nennerfunktionen $x+1$ und $x+3$ ergeben jeweils abgeleitet die Zählerfunktion 1.

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} = \left[3\ (\cdot \ln|x+1| - \ln|x+3|) - 0,2x\right]_0^1$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} = (3\ln 2 - 3\ln 4 - 0{,}2) - (3\ln 1 - 3\ln 3 - 0)$$

$$\int\limits_0^1 k(x)\ \mathrm{dx} \approx 1{,}0$$

Bedeutung:

Während der ersten Minute werden ca. 1 g Schadstoffe abgebaut.