Abitur 2012 Mathematik Stochastik III

Für eine Quizshow sucht ein Fernsehsender Abiturientinnen und Abiturienten als Kandidaten. Jeder Bewerber gibt in einem online auszufüllenden Formular die Durchschnittsnote seines Abiturzeugnisses an.

Teilaufgabe 1 (4 BE)

Insgesamt bewerben sich dreimal so viele weibliche wie männliche Personen, wobei 80% der weiblichen und 75% der männlichen Bewerber eine Durchschnittsnote von 1,5 oder besser angeben. Bestimmen Sie den Anteil der Personen unter allen Bewerbern, die eine schlechtere Durchschnittsnote als 1,5 angeben.

Aus dem Bewerberfeld werden zwanzig weibliche und zehn männliche Personen zu einem Casting eingeladen, das in zwei Gruppen durchgeführt wird.
Fünfzehn der Eingeladenen werden für die erste Gruppe zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die erste Gruppe zehn weibliche und fünf männliche Personen ausgewählt werden, wird mit p bezeichnet.

Teilaufgabe 2a (2 BE)

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass p nicht durch den Term $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ beschrieben wird.

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p mithilfe eines geeigneten Terms.

Nach dem Casting stehen die zehn Kandidaten der Quizshow fest.

Im Rahmen der Show müssen Aufgaben aus verschiedenen Fachgebieten gelöst werden. Die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik ist gleich der Augensumme, die von ihm bei einmaligem Werfen zweier Würfel erzielt wird. Die beiden Würfel tragen jeweils auf zwei Seitenflächen die Augenzahl 0, auf drei Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer Seitenfläche die Augenzahl 2.

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Kandidat genau zwei Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik. Der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X entnommen werden. Ermitteln Sie den fehlenden Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert von X.

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$		$\frac{1}{36}$

Teilaufgabe 3c (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der zehn Kandidaten keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

Teilaufgabe 3d (4 BE)

Bestimmen Sie, wie viele Kandidaten an der Quizshow mindestens teilnehmen müssten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% wenigstens ein Kandidat darunter ist, der keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

Für eine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik kommen zwei Kuverts zum Einsatz, die jeweils fünf Spielkarten enthalten. Es ist bekannt, dass das eine Kuvert genau zwei und das andere genau drei rote Spielkarten enthält. Der Showmaster wählt, jeweils zufällig, ein Kuvert und aus diesem zwei Karten aus.

Teilaufgabe 3e (4 BE)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden ausgewählten Karten rot sind, 20% beträgt.

Teilaufgabe 3f (3 BE)

Der Showmaster zeigt die beiden ausgewählten Karten; sie sind tatsächlich rot. Der Kandidat wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür gefragt, dass die beiden Karten aus dem Kuvert mit den drei roten Karten stammen. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

Lösung

Teilaufgabe 1 (4 BE)

Für eine Quizshow sucht ein Fernsehsender Abiturientinnen und Abiturienten als Kandidaten. Jeder Bewerber gibt in einem online auszufüllenden Formular die Durchschnittsnote seines Abiturzeugnisses an.

Insgesamt bewerben sich dreimal so viele weibliche wie männliche Personen, wobei 80% der weiblichen und 75% der männlichen Bewerber eine Durchschnittsnote von 1,5 oder besser angeben. Bestimmen Sie den Anteil der Personen unter allen Bewerbern, die eine schlechtere Durchschnittsnote als 1,5 angeben.

Lösung zu Teilaufgabe 1

Zeichnen eines Baumdiagramms

Ereignisse definieren:

W: „Bewerber ist weiblich“
M: „Bewerber ist männlich“
D: „Durchschnittsnote von 1,5 oder besser“

Daten aus dem Text analysieren:

„Insgesamt bewerben sich dreimal so viele weibliche wie männliche Personen“

Erläuterung:

Dreimal so viele weibliche wie männliche Personen bedeutet:

$P(W) = 3 \cdot P(M)$

Es gilt:

$P(W) + P(M) = 1 \quad$ (sprich 100%)

$3 \cdot P(M) + P(M) = 1$

$4 \cdot P(M) = 1$

$P(M) = \frac{1}{4} = 0,25$

$\Rightarrow \quad P(W) = 1 - P(M) = 1 - 0,25 = 0,75$

$\Rightarrow \quad P(W) = 75\% = 0,75$
$\Rightarrow \quad P(M) = 25\% = 0,25$

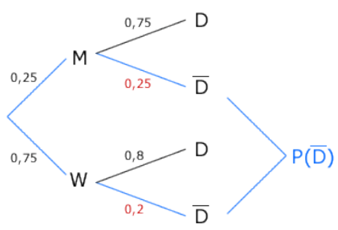
“ 80% der weiblichen Bewerber geben eine Durchschnittsnote von 1,5 ... “

$\Rightarrow \quad P_W(D) = 0,8$

“ 75% der männlichen Bewerber geben eine Durchschnittsnote von 1,5 ... “

$\Rightarrow \quad P_M(D) = 0,75$

Baumdiagramm zeichnen:



Gesucht ist $P(\overline{D})$:

$$P(\overline{D}) = \overbrace{0,25 \cdot 0,25}^{P(M\cap\overline{D})} + \overbrace{0,75 \cdot 0,2}^{P(W\cap\overline{D})} = 0,2125 = 21,25\%$$

Alternative Lösung

$\Rightarrow \quad P(W) = 75\% = 0,75$
$\Rightarrow \quad P(M) = 25\% = 0,25$

“ 80% der weiblichen Bewerber geben eine Durchschnittsnote von 1,5 ... “

$\Rightarrow \quad P(W \cap D) = 80\% \cdot 0,75 = 0,6$

“ 75% der männlichen Bewerber geben eine Durchschnittsnote von 1,5 ... “

$\Rightarrow \quad P(M \cap D) = 75\% \cdot 0,25 = 0,1875$

Vierfeldertafel erstellen:

	M	***W***	
D	$P(M\cap D) = 0{,}1875$	$P(W\cap D) = 0{,}6$	
$\overline{D}$			
	$P(M) = 0{,}25$	$P(W) = 0{,}75$	1

Vierfeldertafel vervollständigen:

	M	***W***	
D	$P(M\cap D) = 0{,}1875$	$P(W\cap D) = 0{,}6$	$P(D) = 0{,}7875$
$\overline{D}$	$P(M\cap \overline{D}) = 0{,}0625$	$P(W\cap \overline{D}) = 0{,}15$	$P(\overline{D}) = 0{,}2125$
	$P(M) = 0{,}25$	$P(W) = 0{,}75$	1

$\Rightarrow \quad P\left(\overline{D}\right) = 0,2125 = 21,25\%$

Teilaufgabe 2a (2 BE)

Aus dem Bewerberfeld werden zwanzig weibliche und zehn männliche Personen zu einem Casting eingeladen, das in zwei Gruppen durchgeführt wird.
Fünfzehn der Eingeladenen werden für die erste Gruppe zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die erste Gruppe zehn weibliche und fünf männliche Personen ausgewählt werden, wird mit p bezeichnet.

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass p nicht durch den Term $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ beschrieben wird.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel einer **Begründung**:

Der Term beschreibt in einem Urnenmodell ein Ziehen mit Zurücklegen, jede eingeladene Person kann aber höchstens einmal ausgewählt werden (Ziehen ohne Zurücklegen).

Erläuterung: *Ziehen mit Zurücklegen*

Man erkennt die Situation „Ziehen mit Zurücklegen“ daran, dass die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ im Term als Potenzen vorkommen. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug gleich bleiben, also „mit Zurücklegen“.

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p mithilfe eines geeigneten Terms.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

E: „10 weibliche und 5 männliche Personen werden ausgewählt“

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um 15-maliges Ziehen ohne Reihenfolge (wer wann ausgewählt wird, ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (eine Person kann nur einmal ausgewählt werden).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

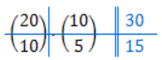
$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \cdot \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

10 Frauen (aus 20) werden ausgewählt:
$\Rightarrow |\text{ Treffer}| = \binom{20}{10}$

5 Männer (aus 10) werden ausgewählt:
$\Rightarrow |\text{ Niete}| = \binom{10}{5}$

15 Personen werden aus 30 ausgewählt:
$\Rightarrow |\Omega| = \binom{30}{15}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



$$p = P(E) = \frac{\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{30}{15}} \approx 30\%$$

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Nach dem Casting stehen die zehn Kandidaten der Quizshow fest.

Im Rahmen der Show müssen Aufgaben aus verschiedenen Fachgebieten gelöst werden. Die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik ist gleich der Augensumme, die von ihm bei einmaligem Werfen zweier Würfel erzielt wird. Die beiden Würfel tragen jeweils auf zwei Seitenflächen die Augenzahl 0, auf drei Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer Seitenfläche die Augenzahl 2.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Kandidat genau zwei Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Wahrscheinlichkeit

Anzahl Augenzahl 0: 2 $\quad\Rightarrow\quad P(0) = \frac{2}{6}$

Anzahl Augenzahl 1: 3 $\quad\Rightarrow\quad P(1) = \frac{3}{6}$

Anzahl Augenzahl 2: 1 $\quad\Rightarrow\quad P(2) = \frac{1}{6}$

E: „Genau zwei Aufgaben“

Erläuterung: *Ereignis*

„Genau zwei Aufgaben“ = Summer der Augenzahl gleich 2

Das ist der Fall, wenn entweder zweimal eine 1 gewürfelt wird oder eine 0 und eine 2 oder auch eine 2 und eine 0.

Zweimal die 1: $\quad p = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \left(\frac{3}{6}\right)^2$

Eine 0 und eine 2: $\quad p = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Eine 2 und eine 0: $\quad p = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}$

$$P(E) = P(\{1\,1; 0\,2; 2\,0\}) = \left(\frac{3}{6}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{36} \approx 36{,}1\%$$

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der von einem Kandidaten zu lösenden Aufgaben aus dem Fachgebiet Mathematik. Der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X entnommen werden. Ermitteln Sie den fehlenden Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert von X.

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$		$\frac{1}{36}$

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Wahrscheinlichkeit

Fehlenden Wert bestimmen:

> Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit einer Zufallsgröße*
>
> Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsgröße ist gleich 1.

$$P(X=3) = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{13}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{6}$$

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Erwartungswert $E(X)$ bestimmen:

> Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*
>
> Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 5) ist definiert als:
>
> $$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\,(X = x_i)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{13}{36} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{3}$$

Teilaufgabe 3c (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der zehn Kandidaten keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Wahrscheinlichkeit

E: „Genau einer der zehn Kandidaten muss keine Mathematik-Aufgabe lösen“

> Erläuterung:
>
> Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat keine Mathematik-Aufgabe lösen muss, kann der Tabelle aus Teilaufgabe 3b entnommen werden:
>
> $$p = \frac{1}{9}$$
>
> Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat mindestens eine Mathematik-Aufgabe lösen muss, gleich:
>
> $$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$
>
> Wenn genau einer der zehn Kandidaten keine Mathematik-Aufgabe lösen muss, dann müssen es die restlichen 9 Kandidaten:
>
> $$\Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^9$$
>
> Welcher Kandidat keine Mathematik-Aufgabe lösen muss, ist irrelevant, deswegen muss das in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit berücksichtigt werden („Durchschieben“):
>
> $$10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^9$$

$$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{7}\,\boxed{8}\,\boxed{9}\,\boxed{10}$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \frac{8}{9}$$

$$P(E) = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^9 \approx 38,49\%$$

Teilaufgabe 3d (4 BE)

Bestimmen Sie, wie viele Kandidaten an der Quizshow mindestens teilnehmen müssten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% wenigstens ein Kandidat darunter ist, der keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik lösen muss.

Lösung zu Teilaufgabe 3d

Binomialverteilung

Text analysieren:

" ... wenigstens ein Kandidat..." $\Rightarrow$ $Z \geq 1$

" ...mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% ..." $\Rightarrow$ $P > 0,9$

" ...keine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik..." $\Rightarrow$ $p = \dfrac{1}{9}$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \dfrac{1}{9}$ angesehen werden (siehe Tabelle aus Teilaufgabe 3b).

$$P^n_{\frac{1}{9}}(Z \geq 1) > 0,9$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$$

$$1 - P^n_{\frac{1}{9}}(Z = 0) > 0,9$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P^n_p(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(\text{0 Treffer}) = P^n_p(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$$

$$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n > 0,9$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n > 0,9 \quad | \quad \text{umstellen}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^n < 1 - 0,9 \quad | \quad \text{logarithmieren}$$

$$\ln\left(\frac{8}{9}\right)^n < \ln(1 - 0,9)$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{8}{9}\right) < \ln(1 - 0,9)$$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$$n > \frac{\ln(1 - 0,9)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$$

$$n > \frac{\ln(1 - 0,9)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} \approx 19,55$$

$n \geq 20$

Es müssen mindestens 20 Kandidaten teilnehmen.

Teilaufgabe 3e (4 BE)

Für eine Aufgabe aus dem Fachgebiet Mathematik kommen zwei Kuverts zum Einsatz, die jeweils fünf Spielkarten enthalten. Es ist bekannt, dass das eine Kuvert genau zwei und das andere genau drei rote Spielkarten enthält. Der Showmaster wählt, jeweils zufällig, ein Kuvert und aus diesem zwei Karten aus.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden ausgewählten Karten rot sind, 20% beträgt.

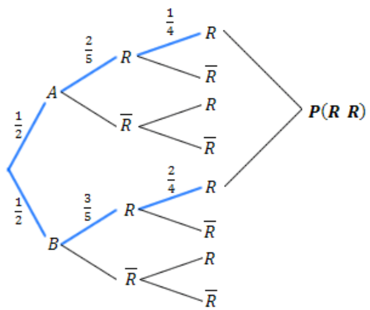
Lösung zu Teilaufgabe 3e

Wahrscheinlichkeit

Kurvert A: 2 rote Karten von 5

Kurvert B: 3 rote Karten von 5

Veranschaulichung durch ein Baumdiagramm:



$$P(R\,R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5} = 20\%$$

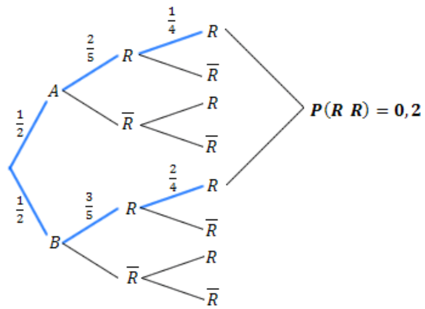
Teilaufgabe 3f (3 BE)

Der Showmaster zeigt die beiden ausgewählten Karten; sie sind tatsächlich rot. Der Kandidat wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür gefragt, dass die beiden Karten aus dem Kuvert mit den drei roten Karten stammen. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 3f

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm aus Teilaufgabe 3e:



Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Die Aufgabenstellung lautet:

„Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden roten Karten (R R) aus dem Kuvert mit den drei roten Karten (Kuvert B) stammen.“

Unter $P_{R\,R}(B)$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B unter der Bedingung des Ereignisses $R\,R$.

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses $R\,R$.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{R\,R}(B)$ ist also die Wahrscheinlichkeit für B, wenn man nur $R\,R$ betrachtet.

Gesucht: $P_{R\,R}(B)$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_{R\,R}(B) = \frac{P(R\,R \cap B)}{P(R\,R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{0,2} = 75\%$$