Fachabitur 2011 Mathematik NT Stochastik S II

Ein Händler für Baby- und Kleinkinderspielwaren hat in seinem Sortiment unter anderem Spielzeuge aus Holz (H). Die Hersteller der Spielzeuge kommen allesamt entweder aus Europa (E) oder aus Asien (A). Weiterhin sind einige Spielzeuge mit einer Rasselfunktion (R) ausgestattet.
Insgesamt sind 60% der Spielzeuge im Sortiment aus Holz. Von diesen Holzspielzeugen kommen 78% aus Europa. Insgesamt kommen 48% der Spielzeuge aus Europa. Unabhängig von der Beschaffenheit und Herkunft haben 30% der Spielzeuge eine Rasselfunktion.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

[Teilergebnis: $P\left(\overline{H}\,A\,\overline{R}\right) = 0,2716$]

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug ist aus Holz.“
E_2 : „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug kommt aus Asien.“

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Nun werden 10 Spielzeuge zufällig nacheinander ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3 : „Genau 3 sind mit einer Rasselfunktion ausgestattet.“
E_4 : „Mindestens 9 sind ohne Rasselfunktion.“
E_5 : „Es sind genau drei mit Rasselfunktion und diese folgen hintereinander.“

Eine Verbraucherschutzorganisation untersucht ausschließlich Spielzeug aus Holz. Dabei werden bei einem Anteil von p Mängel festgestellt.
Nun werden 5 Holzspielzeuge zufällig ausgewählt und auf Mängel untersucht. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Spielzeuge mit Mängeln an.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für genau 5 einwandfreie Spielzeuge 0,4182 beträgt.

Der Anteil mängelbehafteter Holzspielzeuge sei $p = 0,16$.

Teilaufgabe 2.2.1 (5 BE)

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form dar. Geben Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen genau an.

Teilaufgabe 2.2.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > 3)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 2.2.3 (4 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Längeren Erfahrungen zu Folge betrug der Anteil der Spielzeuge aus Kunststoff, welche einen unzulässig hohen Anteil an gesundheitsschädlichem Weichmacher enthielten, genau 15%.
Es wird vermutet, dass sich der Anteil der nicht zulässigen Spielzeuge erhöht hat (Gegenhypothese). Es werden 200 zufällig ausgewählte Spielzeuge aus Kunststoff auf Weichmacher getestet.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese, wenn das Signifikanzniveau 5% betragen soll.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Berechnen Sie bei diesem Test (vgl. 3.1) die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und erläutern Sie ihn im Sinnen der Thematik.

© Abiturloesung.de

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Ein Händler für Baby- und Kleinkinderspielwaren hat in seinem Sortiment unter anderem Spielzeuge aus Holz (H). Die Hersteller der Spielzeuge kommen allesamt entweder aus Europa (E) oder aus Asien (A). Weiterhin sind einige Spielzeuge mit einer Rasselfunktion (R) ausgestattet.
Insgesamt sind 60% der Spielzeuge im Sortiment aus Holz. Von diesen Holzspielzeugen kommen 78% aus Europa. Insgesamt kommen 48% der Spielzeuge aus Europa. Unabhängig von der Beschaffenheit und Herkunft haben 30% der Spielzeuge eine Rasselfunktion.

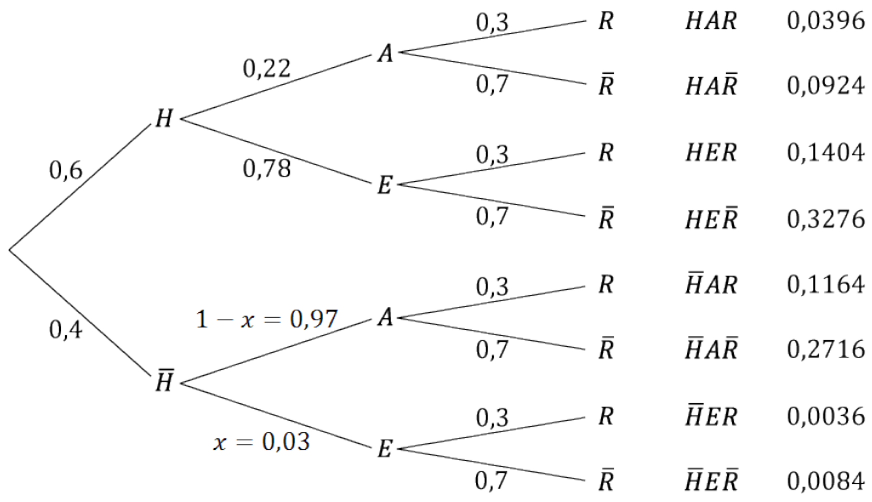
Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

[Teilergebnis: $P\left(\overline{H}\,A\,\overline{R}\right) = 0,2716$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spielzeug aus Europa kommt, ist $P(E) = 0,48$.

Die Wahrscheinlichkeit x berechnet sich mit Hilfe der Pfadregeln:

$$0,6 \cdot 0,78 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,78 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot x \cdot 0,3 + 0,4 \cdot x \cdot 0,7 = 0,48$$

$$0,468 \quad + \quad 0,4x \quad = 0,48$$

$$x = 0,03$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug ist aus Holz.“
E_2 : „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug kommt aus Asien.“

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Stochastische Unabhängigkeit

$E_1 = \{H\,A\,R\ ;\ H\,A\,\overline{R}\ ;\ H\,E\,R\ ;\ H\,E\,\overline{R}\}$

$P(E_1) = 0,0396 + 0,0924 + 0,1404 + 0,3276 = 0,6$

$E_2 = \{H\,A\,R\ ;\ H\,A\,\overline{R}\ ;\ \overline{H}\,A\,R\ ;\ \overline{H}\,A\,\overline{R}\}$

$P(E_2) = 0,0396 + 0,0924 + 0,1164 + 0,2716 = 0,52$

Prüfen auf stochastische Unabhängigkeit:

> Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*
>
> Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen stochastisch unabhängig, wenn
>
> $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$
>
> gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$P(E_1 \cap E_2) = P(H\,A\,R) + P(H\,A\,\overline{R})$

$= 0,0396 + 0,0924$

$= 0,132$

$P(E_1) \cdot P(E_2) = 0,6 \cdot 0,52 = 0,312$

$P(E_1 \cap E_2) \neq P(E_1) \cdot P(E_2)$

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Nun werden 10 Spielzeuge zufällig nacheinander ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3 : „Genau 3 sind mit einer Rasselfunktion ausgestattet.“
E_4 : „Mindestens 9 sind ohne Rasselfunktion.“
E_5 : „Es sind genau drei mit Rasselfunktion und diese folgen hintereinander.“

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Wahrscheinlichkeit

$P(E_3) = \binom{10}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 \approx 0,26683$

$P(E_4) = \binom{10}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^9 = 0,02825 + 0,12106 \approx 0,14931$

Für E_5 betrachtet man die drei hintereinander auftretenden Rasselspielzeuge als eine Gruppe. Es gibt dann $\binom{8}{1}$ Möglichkeiten diese unter den anderen Spielzeugen anzuordnen.

$P(E_5) = \binom{8}{1} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 \approx 0,01779$

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Eine Verbraucherschutzorganisation untersucht ausschließlich Spielzeug aus Holz. Dabei werden bei einem Anteil von p Mängel festgestellt.
Nun werden 5 Holzspielzeuge zufällig ausgewählt und auf Mängel untersucht. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Spielzeuge mit Mängeln an.

Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für genau 5 einwandfreie Spielzeuge 0,4182 beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Wahrscheinlichkeit

5 Spielzeuge sind einwandfrei, d.h. es treten Null Spielzeuge mit Mängel auf.

$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 = 0,4182$

$(1-p)^5 = 0,4182$

$1-p = \sqrt[5]{0,4182}$

$p = 1-\sqrt[5]{0,4182} = 0,16$

Teilaufgabe 2.2.1 (5 BE)

Der Anteil mängelbehafteter Holzspielzeuge sei $p = 0,16$.

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form dar. Geben Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen genau an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$P(X=0) = 0,4182$

$P(X=1) = \binom{5}{1} 0,16^1 \cdot 0,84^4 = 0,3983$

$P(X=2) = \binom{5}{2} 0,16^2 \cdot 0,84^3 = 0,1517$

$P(X=3) = \binom{5}{3} 0,16^3 \cdot 0,84^2 = 0,0289$

$P(X=4) = \binom{5}{4} 0,16^4 \cdot 0,84^1 = 0,0028$

$P(X=5) = \binom{5}{5} 0,16^5 \cdot 0,84^0 = 0,0001$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,4182	0,3983	0,1517	0,0289	0,0028	0,0001

Teilaufgabe 2.2.2 (3 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X>3)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2.2

Wahrscheinlichkeit

$P(X>3) = P(X=4) + P(X=5)$

Mit den Werten aus 2.2.1 ergibt sich:

$P(X>3) = 0,0028 + 0,0001 \approx 0,0029$

Interpretation:
Die Wahrscheinlichkeit für mehr als drei mangelhafte Spielzeuge beträgt $0,29\%$.

Teilaufgabe 2.2.3 (4 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2.3

Erwartungswert und Standardabweichung

Interpretation als Bernoulli-Kette:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

n: Anzahl der Versuche
k: Anzahl der Treffer
p: Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1-p$: Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Es werden hintereinander $n=5$ „Versuche“ (Stichproben) durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“ (mangelhaftes Spielzeug) ist $p = 0,16$.

Berechnen des Erwartungswerts:

> Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*
>
> Der Erwartungswert μ einer binomialverteilten Zufallsgröße X berechnet sich durch:
>
> $\mu = n \cdot p$
>
> n: Anzahl der Versuche
> p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffer pro Versuch

$\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,16 = 0,8$

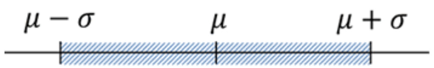
Berechnen der Standardabweichung:

> Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*
>
> Die Standardabweichung σ einer binomialverteilten Zufallsgröße X berechnet sich durch:
>
> $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
>
> n: Anzahl der Versuche
> p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffer pro Versuch
> $1-p$: Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{5 \cdot 0,16 \cdot 0,84} \approx 0,82$

Die Anzahl X der mangelhaften Spielzeuge soll innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

$P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$



$\mu + \sigma = 0,8 + 0,82 = 1,62$

$\mu - \sigma = 0,8 - 0,82 = -0,02$

$\Rightarrow -0,02 \leq X \leq 1,62$ (X muss ganzzahlig sein)

$P(|X-\mu| < \sigma) = P(-0,02 \leq X \leq 1,62) = P(X=0) + P(X=1)$

$= 0,4182 + 0,3983 = 0,8165$

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Längeren Erfahrungen zu Folge betrug der Anteil der Spielzeuge aus Kunststoff, welche einen unzulässig hohen Anteil an gesundheitsschädlichem Weichmacher enthielten, genau 15%.
Es wird vermutet, dass sich der Anteil der nicht zulässigen Spielzeuge erhöht hat (Gegenhypothese). Es werden 200 zufällig ausgewählte Spielzeuge aus Kunststoff auf Weichmacher getestet.

Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese, wenn das Signifikanzniveau 5% betragen soll.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Hypothesentest - Annahmebereich und Ablehnungsbereich

Testgröße: Anzahl der Spielzeuge mit zu hohem Weichmacheranteil unter 200 getesteten.

> Erläuterung: *Nullhypothese*
>
> Man vermutet zwar, dass der Anteil an unzulässigen Spielzeugen gestiegen ist, möchte jedoch eine Fehlentscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% vermeiden.
>
> Fehlentscheidung bedeutet in diesem Fall, dass der Anteil an Spielzeugen mit Weichmacher unverändert geblieben ist und man sich („irrtümlich“) geirrt hat.
>
> Die Nullhypothese ist also das Gleichbleiben des Anteils unzulässiger Spielzeuge bei $p = 0,15$.

© Abiturloesung.de

Nullhypothese $H_0: \ p = 0,15$

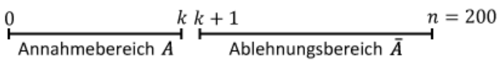
H_0 in Worten: 15% der Spielzeuge enthalten einen unzulässig hohen Anteil an gesundheitsschädlichem Weichmacher.

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Annahmebereich von $H_0: \ A = [0 \ ; \ k]$

Ablehnungsbereich von $H_0: \ \overline{A} = [k+1 \ ; \ 200]$



Die Wahrscheinlichkeit, dass bei $p = 0,15$ die Anzahl der mangelhaften Spielzeuge größer als ein bestimmter Schwellwert k ist, soll kleiner sein als $\alpha = 0,05$.

$P(X > k) \leq 0,05$

$1 - P(X \leq k) \leq 0,05$

$P(X \leq k) \geq 0,95$

$F_{0,15}^{200}(k) \geq 0,95$

$k = 38$ (aus Tafelwerk)

Maximaler Ablehnungsbereich:

$\overline{A} = \{39; 40; ....; 200\}$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Berechnen Sie bei diesem Test (vgl. 3.1) die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und erläutern Sie ihn im Sinnen der Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Hypothesentest - Fehler erster Art

Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Der Fehler 1. Art liegt in der Ablehnung der Nullhypothese, obwohl sie der Wahrheit entspricht.

Es ist möglich, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln beim Test oberhalb des Schwellwertes k liegt, auch wenn die Wahrscheinlichkeit $p = 0,4$ unverändert ist.
Aufgrund des Testausgangs schlussfolgert man jedoch, dass p gestiegen ist und begeht hiermit einen Fehler. Diesen nennt man den Fehler 1. Art.

$P(X \geq 39) = 1 - P(X \leq 38) = 1 - F_{0,15}^{200}(38) \overset{TW}{=} 1 - 0,9502 = 0,0498$

Der Fehler 1. Art besteht darin, dass die Nullhypothese fälschlich abgelehnt wird, d.h. man geht davon aus, dass sich der Anteil an unzulässigen Spielzeugen erhöht hat, obwohl er unverändert ist.

© Abiturloesung.de