Fachabitur 2011 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_f an.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-3,5 \leq x \leq 3,5$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

Gegeben sind nun die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - a$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Für $a = 3$ erhält man die Funktion aus Aufgabe 1. Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 können bei den folgenden Aufgaben verwendet werden.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten aller relativer Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Bestimmen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 2.1 die Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.

Gegeben ist weiterhin die Funktion p durch $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ mit $D_p = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass p genau zwei gemeinsame Nullstellen mit der Funktion f aus Aufgabe 1 hat.
Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4.

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 1) und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau.

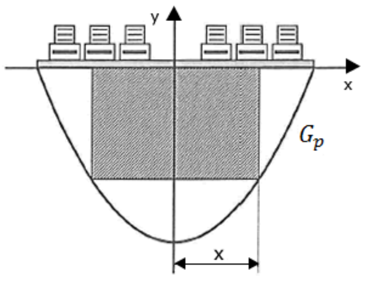
Teilaufgabe 3.3 (3 BE)

Die in 3.2 beschriebene Fläche stellt die Form eines Firmenlogos dar. Es soll aus einer dünnen Styroporplatte ausgesägt werden. Die Platte wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = -3$ und $y = 1$ von außen begrenzt. Berechnen Sie den Anteil des Abfalls nach dem Aussägen in Prozent.

Teilaufgabe 4. (7 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion H durch $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
H ist eine Stammfunktion der ganzrationalen Funktion h.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $H(x)$, wenn der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und $W\left(-3 \mid \frac{3}{4}\right)$ ein Wendepunkt des Graphen G_H ist.

Der Gepäckraum eines Flugzeugs kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p : x \mapsto 0,5x^2 - 3,125$ beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung).



Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.

Teilaufgabe 5.1 (4 BE)

Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche $A(x)$ der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. [Teilergebnis: $A(x) = -x^3 + 6,25x$]

Teilaufgabe 5.2 (6 BE)

Berechnen Sie x so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_f an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3 = 0$$

Substitution:

Erläuterung: *Substitution*

Bei ganzrationalen Funktionen wird die Bestimmung der Nullstellen mit steigendem Grad immer aufwendiger. Kommen im Funktionsterm nur geradzahlige Potenzen von x vor, so kann man mithilfe einer Substitution (Ersetzung) den Grad der Funktion verringern und somit die Nullstellensuche einfacher gestalten oder sogar erst ermöglichen.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl z, sodass gilt:
$z = x^2$
An Stelle von $-\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ kann man also auch schreiben $-\frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{3}z - 3$ mit $z = x^2$

Man hat den Term x^2 durch die Variable z substituiert (ersetzt).

$z = x^2$

$-\frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{3}z - 3 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot (-3)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{3}}}{-\frac{2}{9}} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}}{-\frac{2}{9}}$$

$\Rightarrow \quad z_1 = 3$
$\Rightarrow \quad z_2 = 9$

Resubstitution:

$z_1 = 3 \Rightarrow x^2 = 3$

$x_1^N = \sqrt{3}$
$x_2^N = -\sqrt{3}$

$z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9$

$x_3^N = 3$
$x_4^N = -3$

Symmetrieverhalten einer Funktion

Da in f nur geradzahlige Potenzen von x vorkommen, ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

Alternative Lösung

$$f(-x) = -\frac{1}{9}(-x)^4 + \frac{4}{3}(-x)^2 - 3 = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3 = f(x)$$

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$\Rightarrow \quad G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{8}{3}x$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung Null setzen: $f'(x) = 0$

$-\frac{4}{9}x^3 + \frac{8}{3}x = 0$

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{3}\right)=0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1^E=0$

$$-\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{3}=0$$
$$-\frac{4}{9}x^2=-\frac{8}{3}$$
$$x^2=6$$

$$\Rightarrow \quad x_2^E=\sqrt{6}\ ;\ x_3^E=-\sqrt{6}$$

$y_1^E=f(0)=-3 \quad \Rightarrow \quad E_1(0|-3)$

$y_2^E=f\left(\sqrt{6}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad E_2(\sqrt{6}|1)$

$y_3^E=f\left(-\sqrt{6}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad E_3(-\sqrt{6}|1)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$$f''(x)=-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right)=0$ und $f''\left(x^E\right)>0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right)=0$ und $f''\left(x^E\right)<0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$f''\left(x_1^E\right)=f''(0)=\frac{8}{3}>0 \quad \Rightarrow \quad E_1(0|-3)$ Tiefpunkt

$f''\left(x_2^E\right)=f''\left(\sqrt{6}\right)=-\frac{16}{3}<0 \quad \Rightarrow \quad E_2\left(\sqrt{6}|1\right)$ Hochpunkt

$f''\left(x_3^E\right)=f''\left(-\sqrt{6}\right)=-\frac{16}{3}<0 \quad \Rightarrow \quad E_3\left(-\sqrt{6}|1\right)$ Hochpunkt

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Krümmungsverhalten einer Funktion

Mögliche Wendestelle(n) bestimmen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:

$f''\left(x^{\text{WP}}\right)=0, \qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f''(x)=0$

$f''(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{3}=0$

$$-\frac{4}{3}x^2=-\frac{8}{3}$$

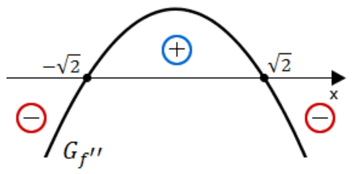
$x^2=2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}^{\text{WP}}=\pm\sqrt{2}$

Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an den Stellen $x=\pm\sqrt{2}$ mithilfe einer Skizze bestimmen:

Erläuterung: *Parabel*

Der Graph der zweiten Ableitung ist eine nach unten geöffnete Parabel (negativer Leitkoeffizient). Sie schneidet die x-Achse bei $x=\pm\sqrt{2}$

Skizze von f'':



> Erläuterung: *Funktionswert*
>
> Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die zweite Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.
>
> Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$f''(x) > 0 \quad$ für $\quad x \in \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$

$f''(x) < 0 \quad$ für $\quad x \in \left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2};+\infty\right[$

> Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*
>
> Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.
>
> Es gilt:
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a;b]$ rechtsgekrümmt.
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a;b]$ linksgekrümmt.
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist linksgekrümmt für $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \quad G_f$ ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

Wendepunkt ermitteln

Lage der Wendepunkte bestimmen:

$y^{\text{WP}} = f\left(x^{\text{WP}}\right) = f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{7}{9} \qquad$ (wg. Symmetrie s. 1.1)

> Erläuterung: *Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

Da sich an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$ das Krümmungsverhalten ändert, sind $\text{WP}_1\left(-\sqrt{2}| -\frac{7}{9}\right)$ und $\text{WP}_2\left(\sqrt{2}| -\frac{7}{9}\right)$ Wendepunkte.

Alternative Lösung

Wendepunkte mittels dritter Ableitung ermitteln:

$f'''(x) = -\frac{8}{3}x$

> Erläuterung: *Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$f'''\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}_1\left(-\sqrt{2}| -\frac{7}{9}\right)$ ist Wendepunkt

$f'''\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{8}{3}\sqrt{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}_2\left(\sqrt{2}| -\frac{7}{9}\right)$ ist Wendepunkt

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-3,5 \leq x \leq 3,5$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze

Nullstellen (s. Aufgabe 1.1):

$x_1^N = \sqrt{3}$; $x_2^N = -\sqrt{3}$; $x_3^N = 3$; $x_4^N = -3$

Extrempunkte (s. Aufgabe 1.2):

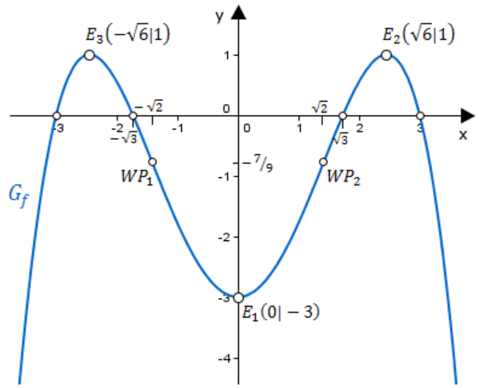
$E_1(0|-3)$ Tiefpunkt
$E_2(\sqrt{6}|1)$ Hochpunkt
$E_3(-\sqrt{6}|1)$ Hochpunkt

Wendepunkte (s. Aufgabe 1.3):

$\text{WP}_1\left(-\sqrt{2}|-\frac{7}{9}\right)$; $\text{WP}_2\left(\sqrt{2}|-\frac{7}{9}\right)$

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	$-3,5$	-3	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3	$3,5$
$f(x)$	$-3,34$	0	1	0	$-\frac{7}{9}$	-3	$-\frac{7}{9}$	0	1	0	$-3,34$



Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Gegeben sind nun die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - a$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Für $a = 3$ erhält man die Funktion aus Aufgabe 1. Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 können bei den folgenden Aufgaben verwendet werden.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller relativer Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

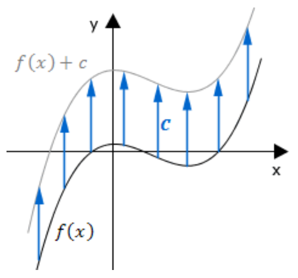
Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f_a(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - a$$

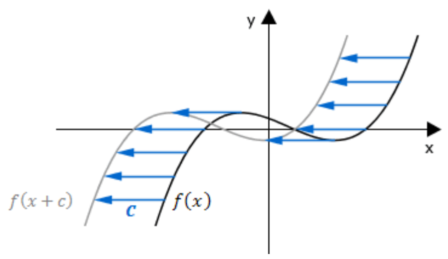
f_a entsteht aus f (aus Aufgabe 1) durch eine vertikale Verschiebung um $3 - a$ nach oben.

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Ändert man den Funktionsterm einer Funktion f von $f(x)$ auf $f(x)+c$, so ändert sich nicht sein Aussehen, jedoch die Lage im Koordinatensystem.
Der Graph wird um den Wert c nach oben (Richtung positiver y-Achse) verschoben.



Ändert man den Funktionsterm einer Funktion f von $f(x)$ auf $f(x+c)$, so ändert sich sein Aussehen ebenfalls nicht, jedoch wieder die Lage im Koordinatensystem.
Der Graph wird um den Wert c nach links (Richtung negativer x-Achse) verschoben.



Die Extrempunkte ändern sich somit nur in ihrem y-Wert.
Für die neuen y-Koordinaten $y_{a,1}^E$, $y_{a,2}^E$ und $y_{a,3}^E$ gilt:

$f_a(0) = -a$
$\Rightarrow E_{a,1}\ (0| - a)$

$f_a\left(\sqrt{6}\right) = 4 - a$
$\Rightarrow E_{a,2}\left(\sqrt{6} \mid 4 - a\right)$

$f_a\left(-\sqrt{6}\right) = 4 - a$
$\Rightarrow E_{a,3}\left(-\sqrt{6} \mid 4 - a\right)$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Bestimmen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 2.1 die Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Vielfachheit von Nullstellen

Fallunterscheidung:

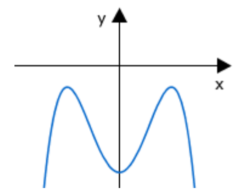
Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Der Graph von f_a wird für verschiedene Werte für a unterschiedlich weit nach oben bzw. unten verschoben.
Je nach Lage des Graphen ändern sich auch die Art, Lage und Anzahl der Nullstellen.

Man betrachtet die y-Koordinaten der Extrempunkte:

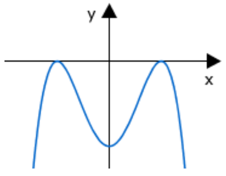
1. Fall: Die Hochpunkte liegen unterhalb der x-Achse

$y_{a,2}^E < 0$
$4 - a < 0$
$4 < a$
$\Rightarrow$ keine Nullstellen



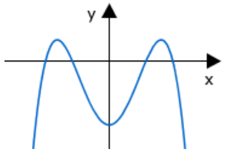
2. Fall: Die Hochpunkte liegen genau auf der x-Achse

$y^E_{a,2} = 0$
$4 - a = 0$
$4 = a$
$\Rightarrow$ zwei doppelte Nullstellen



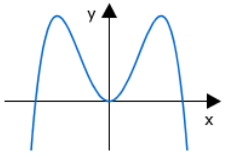
3. Fall: Die Hochpunkte liegen oberhalb, der Tiefpunkt aber unterhalb der x-Achse

$y^E_{a,2} > 0$ und $y^E_{a,1} < 0$
$4 - a > 0$ und $-a < 0$
$4 > a$ und $a > 0$, also $0 < a < 4$
$\Rightarrow$ vier einfache Nullstellen



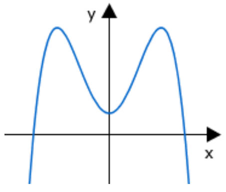
4. Fall: Der Tiefpunkt liegt genau auf der x-Achse

$y^E_{a,1} = 0$
$-a = 0$
$a = 0$
$\Rightarrow$ nicht möglich wegen $a \in \mathbb{R}^+$



5. Fall: Der Tiefpunkt liegt oberhalb der x-Achse

$y^E_{a,1} > 0$
$-a > 0$
$a < 0$
$\Rightarrow$ nicht möglich wegen $a \in \mathbb{R}^+$



Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Gegeben ist weiterhin die Funktion p durch $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ mit $D_p = \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass p genau zwei gemeinsame Nullstellen mit der Funktion f aus Aufgabe 1 hat.
Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Nullstellen einer Funktion

$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$

$f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$

Nullstellen von f: (s. Aufgabe 1.1)

$x^N_1 = \sqrt{3}$

$x^N_2 = -\sqrt{3}$

$x^N_3 = 3$

$x^N_4 = -3$

Nullstellen von p bestimmen:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$p(x) = 0$

$-\frac{1}{3}x^2 + 1 = 0$

$-\frac{1}{3}x^2 = -1$

$x^2 = 3$

$x_1 = \sqrt{3} = x_1^N$

$x_2 = -\sqrt{3} = x_2^N$

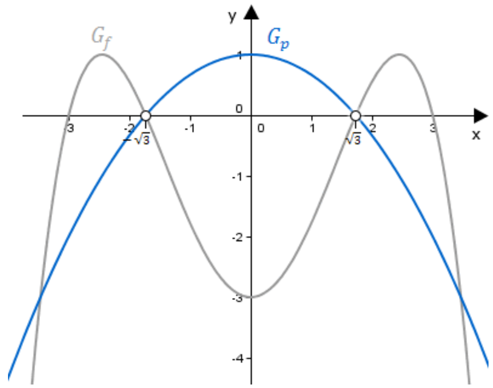
Skizze

Nullstellen: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$

Scheitel: $S(0|1)$

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	$-4{,}33$	-2	$-0{,}33$	$0{,}67$	1	$0{,}67$	$-0{,}33$	-2	$-4{,}33$

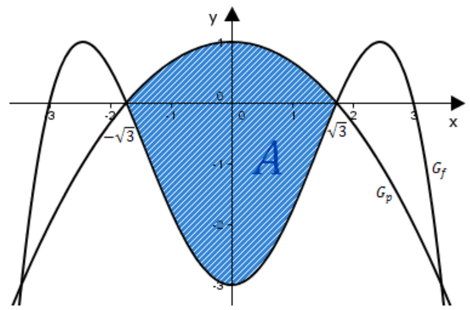


Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 1) und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Flächenberechnung



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion g, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_g gegeben durch:

$$A = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\, \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$A = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(p(x) - f(x)\right)\, \mathrm{dx}$$

$$A = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^2 + 1 - \left(-\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3\right)\right)\, \mathrm{dx}$$

$$A = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4\right)\, \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r\, \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4\right)\, \mathrm{dx} = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} = \frac{1}{45}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + 4x$$

$$A = \left[\frac{1}{45}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + 4x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = \left[\, F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \left(\frac{1}{45} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^5 - \frac{5}{9} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 + 4 \cdot \sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{45} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^5 - \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)\right)$$

$A \approx 8,78$

Alternative Lösung

Aus der Symmetrie der Graphen, folgt:

$$A = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4\right)\, \mathrm{dx} = 2 \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4\right)\, \mathrm{dx}$$

Und somit:

$$A = 2 \cdot \left[\frac{1}{45}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + 4x\right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \left(0 - \left(\frac{1}{45} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^5 - \frac{5}{9} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)\right)\right)$$

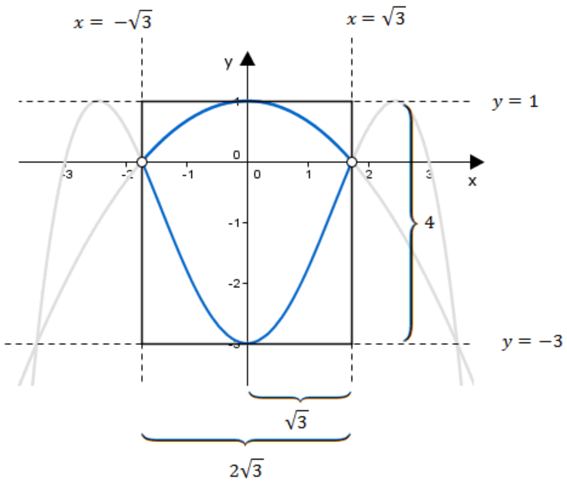
$A \approx 2 \cdot 4,39 = 8,78$

Teilaufgabe 3.3 (3 BE)

Die in 3.2 beschriebene Fläche stellt die Form eines Firmenlogos dar. Es soll aus einer dünnen Styroporplatte ausgesägt werden. Die Platte wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = -3$ und $y = 1$ von außen begrenzt. Berechnen Sie den Anteil des Abfalls nach dem Aussägen in Prozent.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Prozentrechnung



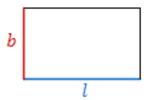
Berechnung der Fläche der rechteckigen Styroporplatte:

Breite der Platte: $2\sqrt{3}$
Länge der Platte: 4

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Rechtecks*

Die Fläche eines Rechtecks der Länge l und der Breite b ist gegeben durch:

$$A = l \cdot b$$



$$A_{\text{Platte}} = l \cdot b = 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$$

$A_{\text{Logo}} \approx 8,78$ (s. Teilaufgabe 3.2)

Der beim Aussägen entstandene Abfall ist gegeben durch:

$$A_{\text{Abfall}} = A_{\text{Platte}} - A_{\text{Logo}} = 8\sqrt{3} - 8,78$$

Der prozentuale Anteil des Abfalls an der ganzen Platte:

$$\frac{A_{\text{Abfall}}}{A_{\text{Platte}}} = \frac{8\sqrt{3} - 8,78}{8\sqrt{3}} \approx 36,6\%$$

Teilaufgabe 4. (7 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion H durch $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
H ist eine Stammfunktion der ganzrationalen Funktion h.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $H(x)$, wenn der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und $W\left(-3 \mid \frac{3}{4}\right)$ ein Wendepunkt des Graphen G_H ist.

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Funktionsgleichung ermitteln

$$H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

$$h(x) = H'(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 3a\,x^2 + 2b\,x + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a, b, c und d enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

Bedingungen analysieren:

1. h ist punktsymmetrisch zum Ursprung: $h(-x) = -h(x)$
   $\Rightarrow$ $h(x)$ enthält nur ungerade Potenzen von x
   $\Rightarrow$ $a = c = 0$

2. $W\left(-3|\frac{3}{4}\right)$ ist ein Wendepunkt von H:

$\Rightarrow$ a) $H''(-3) = 0$ (I)

$\Rightarrow$ b) $H(-3) = \frac{3}{4}$ (II)

Einsetzen von $a = c = 0$ in $H(x)$: $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + b\,x^2 + d$

Erste Ableitung bilden: $h(x) = H'(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 2b\,x$

Zweite Ableitung bilden: $h'(x) = H''(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 2b$

Gleichung (I) lautet somit: $H''(-3) = 0$

$-\frac{1}{9} \cdot (-3)^2 + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von $b = \frac{1}{2}$ in $H(x)$: $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + d$

Gleichung (II) lautet dann: $H(-3) = \frac{3}{4}$

$$-\frac{1}{108} \cdot (-3)^4 + \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 + d = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{9}{2} + d = \frac{3}{4}$$

$$\frac{15}{4} + d = \frac{3}{4}$$

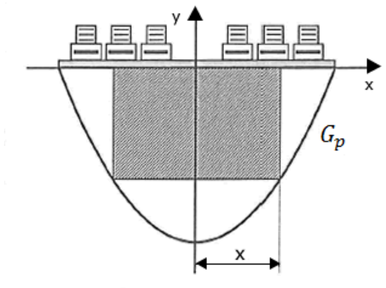
$$d = -3$$

Einsetzen von $d = -3$ in $H(x)$:

$$H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$$

Teilaufgabe 5.1 (4 BE)

Der Gepäckraum eines Flugzeugs kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p: x \mapsto 0{,}5x^2 - 3{,}125$ beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung).

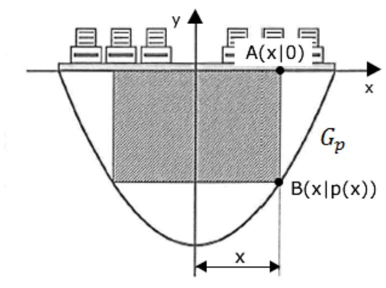


Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.

Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche $A(x)$ der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. [Teilergebnis: $A(x) = -x^3 + 6{,}25x$]

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

Funktionsgleichung ermitteln



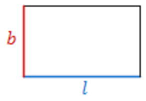
$p(x) = 0{,}5x^2 - 3{,}125$

Bestimmen der Querschnittsfläche:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Rechtecks*

Die Fläche eines Rechtecks der Länge l und der Breite b ist gegeben durch:

$A = l \cdot b$



$A(x) = 2x \cdot (y_A - y_B)$

$A(x) = 2x \cdot (0 - p(x))$

$A(x) = 2x \cdot \left(-0,5x^2 + 3,125\right)$

$A(x) = -x^3 + 6,25x$

Definitionsbereich bestimmen

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

1. Die Breite der Container muss positiv sein: $2x > 0$
   $\Rightarrow \quad x > 0$

2. Die Höhe der Container muss positiv sein: $-p(x) > 0$

   $-0,5x^2 + 3,125 > 0$

   $-0,5x^2 > -3,125$

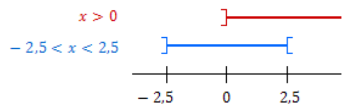
   $x^2 < 6,25 \qquad | \sqrt{}$

   $\pm x < 2,5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{-x < 2,5}_{x > -2,5}$ und $x < 2,5$

   $\Rightarrow \quad -2,5 < x < 2,5$

Erläuterung: *Zahlenstrahl*

Um die Bedingungen zu kombinieren, bedient man sich der Anschauung durch einen Zahlenstrahl:



$\Rightarrow 0 < x < 2,5$

Es folgt also für die Definitionsmenge:

$D_A =]0; 2,5[$

Teilaufgabe 5.2 (6 BE)

Berechnen Sie x so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container.

Lösung zu Teilaufgabe 5.2

Extremwertaufgabe

$A(x) = -x^3 + 6,25x$

Gefragt ist nach demjenigen Wert x, für den die Querschnittsfläche $A(x)$ maximal wird. Man sucht also die Extremstelle (Maximum) der Funktion A.

Erste Ableitung bilden:

$A'(x) = -3x^2 + 6,25$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0,\qquad$ daher immer der Ansatz: $\qquad f'(x) = 0$

$-3x^2 + 6,25 = 0$

$x^2 = \dfrac{6,25}{3}$

$x_1 = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} \qquad \left(x_2 = -\dfrac{5}{2\sqrt{3}} \notin D_A\right)$

Die negative Lösung ist wegen $x > 0$ nicht im Definitionsbereich.

$\Rightarrow \qquad x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

Zweite Ableitung bestimmen:

$A''(x) = -6x$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle $x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ untersuchen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$A''\left(\dfrac{5}{2\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{15}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum bei $x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

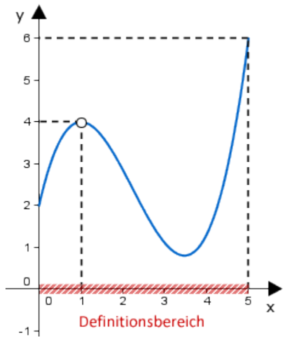
$A\left(\dfrac{5}{2\sqrt{3}}\right) \approx 6,01$

Erläuterung: *Randbetrachtung*

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

Beispiel:



Diese Funktion hat zwar ein relatives Maximum im Punkt $HOP(1|4)$, dies ist jedoch nicht der größte Wert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annehmen kann.
Bei $(5|6)$ gibt es am Rand des Definitionsbereichs damit noch einen größeren Wert. Dies wäre dann hier das globale Maximum.

Randbetrachtung:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-x^3 + 6,25x\right) = 0 < 6,01$

$\lim\limits_{x\to 2,5^-} \left(-x^3 + 6,25x\right) = 0 < 6,01$

$\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

Alternative zur Randbetrachtung:

$x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ ist die einzige Nullstelle von f' im Definitionsbereich, somit gibt es keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens. Für $x = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ nimmt die Querschnittsfläche den absolut größten Inhalt an.

Funktionswert berechnen

Berechnen der zu $x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ zugehörigen Breite:

$2x^E = 2 \cdot \dfrac{5}{2\sqrt{3}} \approx 2,89$

Berechnen der zu $x^E = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ zugehörigen Höhe:

$-p\left(x^E\right) = -p\left(\dfrac{5}{2\sqrt{3}}\right) \approx 2,08$