Abitur 2011 G8 Abitur Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil 1 1 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{4x+5}$ mit maximaler Definitionsmenge D.
Geben Sie D an und ermitteln Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für die Ableitung f' von f.

Teilaufgabe Teil 1 2 (5 BE)

Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f : x \mapsto x \cdot \ln x$ ist.
Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, die in $x = 1$ eine Nullstelle hat.

Teilaufgabe Teil 1 3 (5 BE)

Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von $6,1$ Milliarden zu Beginn des Jahres 2000 auf $6,9$ Milliarden zu Beginn des Jahres 2010. Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form $N(x) = N_0 \cdot e^{k\cdot(x-2000)}$ beschreiben, wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist.
Bestimmen Sie N_0 und k.

Betrachtet wird die Aussage $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = 0$.

Teilaufgabe Teil 1 4a (3 BE)

Machen Sie ohne Rechnung anhand einer sorgfältigen Skizze plausibel, dass die Aussage wahr ist.

Teilaufgabe Teil 1 4b (3 BE)

Weisen Sie mithilfe einer Stammfunktion die Gültigkeit der Aussage durch Rechnung nach.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$ mit Definitionsmenge D_f. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f, einen beliebigen Punkt $Q(x|f(x))$ auf G_f sowie den Punkt $P(1,5|0)$ auf der x-Achse.

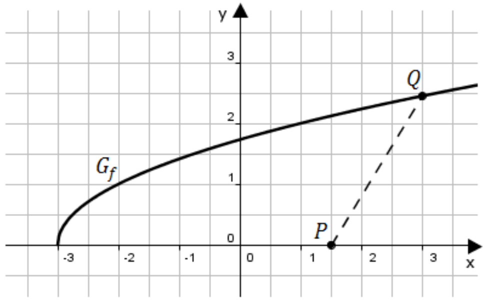


Abb. 1

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Begründen Sie, dass $D_f = [-3; +\infty[$ die maximale Definitionsmenge von f ist. Wie geht G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervor?

Teilaufgabe Teil 2 1b (4 BE)

Zeigen Sie, dass für die Entfernung $d(x)$ des Punkts $Q(x|f(x))$ vom Punkt $P(1,5|0)$ gilt: $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5,25}$.

Teilaufgabe Teil 2 1c (7 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten desjenigen Graphenpunkts $Q_E\ (x_E|y_E)$, der von P den kleinsten Abstand hat. Tragen Sie Q_E in Abbildung 1 ein.
(zur Kontrolle: $x_E = 1$)

Teilaufgabe Teil 2 1d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Verbindungsstrecke $[P\,Q_E]$ und die Tangente an G_f im Punkt Q_E senkrecht zueinander sind.

Teilaufgabe Teil 2 1e (6 BE)

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f, der x-Achse und der Strecke $[P\,Q_E]$ begrenzt wird.

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierten gebrochenrationalen Funktion g mit folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion g hat in $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel;
- G_g verläuft stets oberhalb seiner schrägen Asymptote, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ gegeben ist;
- die einzige Nullstelle von g ist $x = -1$.

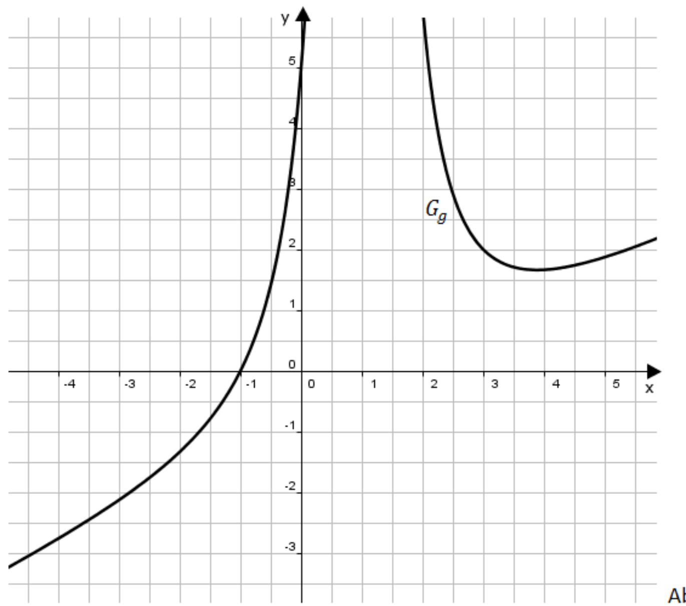


Abb. 2

Teilaufgabe Teil 2 2a (6 BE)

Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 näherungsweise den Wert der Ableitung g' von g an der Stelle $x = -1$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.
Aus der Gleichung der schrägen Asymptote ergibt sich unmittelbar das Verhalten der Ableitung g' für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie dieses Verhalten an und skizzieren Sie den Graphen von g' in Abbildung 2.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Die Funktion g hat eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

I $\quad y = x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$ $\qquad$ II $\quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{x-1}$ $\qquad$ III $\quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.
Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Bestimmen Sie den passenden Wert von a.

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Betrachtet wird nun die Funktion h mit $h(x) = \ln(g(x))$. Geben Sie mithilfe des Verlaufs von G_g die maximale Definitionsmenge D_h von h, das Verhalten von h an den Grenzen von D_h sowie einen Näherungswert für die Nullstelle von h an.

Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{4x+5}$ mit maximaler Definitionsmenge D.
Geben Sie D an und ermitteln Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für die Ableitung f' von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1

Definitionsbereich bestimmen

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+5}$$

> Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*
>
> $f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $4x+5$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$4x+5 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{4}\}$$

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \left(\frac{2x+3}{4x+5}\right)'$$

> Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*
>
> Quotientenregel:
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$
>
> Hier ist $\quad u(x) = 2x+3 \quad$ und $\quad v(x) = 4x+5$.
> Dann ist $\quad u'(x) = 2 \quad$ und $\quad v'(x) = 4$.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(4x+5) - 4\cdot(2x+3)}{(4x+5)^2} \qquad | \quad \text{Ausmultiplizieren}$$

$$f'(x) = \frac{8x+10-8x-12}{(4x+5)^2} \qquad | \quad \text{Zusammenfassen}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(4x+5)^2}$$

Teilaufgabe Teil 1 2 (5 BE)

Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f : x \mapsto x \cdot \ln x$ ist.
Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, die in $x = 1$ eine Nullstelle hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2

Nachweis einer Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)$$

Erste Ableitung bilden:

$$F'(x) = \left[\frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)\right]'$$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

$h(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2\ln x - 1$.

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(2x \cdot (2\ln x - 1) + x^2 \cdot \frac{2}{x}\right)$$

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot (4x \cdot \ln x - 2x + 2x)$$

$$F'(x) = x \cdot \ln x = f(x)$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\quad F' = f$.

$\Rightarrow \quad F$ ist eine Stammfunktion von f.

Nullstellen einer Stammfunktion

$$F_C(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1) + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

F_C ist die Menge aller Stammfunktionen.

$$F_C(1) = 0 = -\frac{1}{4} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{4}$$

$$F_{\frac{1}{4}}(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1) + \frac{1}{4}$$

Probe: $\quad F_{\frac{1}{4}}(1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow \quad F_{\frac{1}{4}}$ ist diejenige Stammfunktion von f, die in $x = 1$ eine Nullstelle hat.

Teilaufgabe Teil 1 3 (5 BE)

Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von $6,1$ Milliarden zu Beginn des Jahres 2000 auf $6,9$ Milliarden zu Beginn des Jahres 2010. Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form

$N(x) = N_0 \cdot e^{k\cdot(x-2000)}$ beschreiben, wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist.
Bestimmen Sie N_0 und k.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

Jahr 2000: $\quad N(2000) = 6,1 \cdot 10^9$
Jahr 2010: $\quad N(2010) = 6,9 \cdot 10^9$

$$N(x) = N_0 \cdot e^{k\cdot(x-2000)}$$

Gesucht: N_0 und k

$$N(2000) = N_0 \cdot e^{k\cdot(2000-2000)} = N_0 \cdot \overbrace{e^0}^{1} = N_0$$

$\Rightarrow \quad N_0 = 6,1 \cdot 10^9$

$$N(2010) = 6,9 \cdot 10^9$$

$$6,1 \cdot 10^9 \cdot e^{k\cdot(2010-2000)} = 6,9 \cdot 10^9 \qquad | \quad :\left(6,1 \cdot 10^9\right)$$

$$e^{10k} = \frac{6,9}{6,1} \qquad | \quad \text{Logarithmieren}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^{10k} = \frac{6,9}{6,1}$ angewendet.

$\ln\left(e^{10k}\right) = \ln\left(\frac{6,9}{6,1}\right)$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$10k = \ln \frac{6,9}{6,1}$

$10k = \ln\left(\frac{6,9}{6,1}\right) \quad | \quad :10$

$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{6,9}{6,1}\right) \approx 0,012$

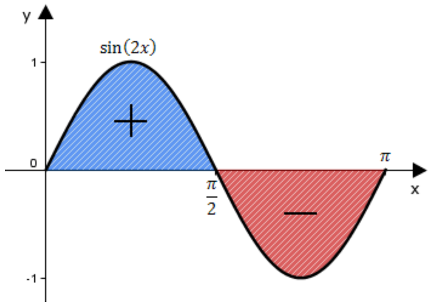
Teilaufgabe Teil 1 4a (3 BE)

Betrachtet wird die Aussage $\int\limits_0^{\pi} \sin(2x)d\,x = 0$.

Machen Sie ohne Rechnung anhand einer sorgfältigen Skizze plausibel, dass die Aussage wahr ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4a

Bestimmtes Integral



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int\limits_0^{\pi} \sin(2x)d\,x$ entspricht der Differenz der zwei Flächen (Fläche unterhalb der x-Achse ist negativ), die der Graph der Sinusfunktion mit der x-Achse zwischen 0 und π einschließt (die Periode der Sinusfunktion $\sin(2x)$ ist gleich π.)

Beide Flächen haben gleichen Inhalt, somit ist ihre Differenz gleich Null.

Die Fläche, die der Graph von $\sin(2x)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ mit der x-Achse einschließt, ist genauso groß wie die Fläche zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π. Letztere kommt mit negativen Vorzeichen.

Teilaufgabe Teil 1 4b (3 BE)

Weisen Sie mithilfe einer Stammfunktion die Gültigkeit der Aussage durch Rechnung nach.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4b

Bestimmtes Integral

Stammfunktion von $\sin(2x)$ bestimmen:

Erläuterung: *Stammfunktion*

Aus der „Merkhilfe Mathematik“ entnimmt man:

$(\sin(x))' = \cos(x)$

(Die Ableitung des Sinus ist der Kosinus)

$f(x) = \sin(2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(2x) \cdot 2$

Damit erkennt man schnell, dass die Stammfunktion von $f(x) = \sin(2x)$ den Kosinus beinhalten muss.

Da die Ableitung des Kosinus aber Minus Sinus ergibt $(\cos(x))' = -\sin(x)$, muss der Faktor negativ sein.
Um die 2, die beim Ableiten mit der Kettenregel entsteht, auszugleichen, muss mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden.

Somit lautet die Stammfunktion:

$\Rightarrow \quad F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$,

da $F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)\sin(2x) = \sin(2x) = f(x)$

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Integral bestimmen:

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin(2x)\mathrm{dx} &= \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} \\
&= \left[-\frac{1}{2}\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \left(-\frac{1}{2}\underbrace{\cos(0)}_{1}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x+3}$ mit Definitionsmenge D_f. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f, einen beliebigen Punkt $Q(x|f(x))$ auf G_f sowie den Punkt $P(1,5|0)$ auf der x-Achse.

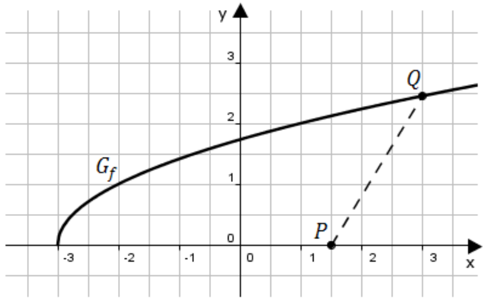


Abb. 1

Begründen Sie, dass $D_f = [-3; +\infty[$ die maximale Definitionsmenge von f ist. Wie geht G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w: x \mapsto \sqrt{x}$ hervor?

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \sqrt{x+3}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

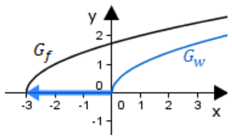
$f(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $x+3$, muss größer oder gleich Null sein. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x + 3 \geq 0$.

$x + 3 \geq 0$

$x \geq -3$

$\Rightarrow \quad D_f = [-3; +\infty[$

Verschiebung von Funktionsgraphen



G_f geht durch Verschiebung von G_w entlang der x-Achse um 3 Einheiten nach links hervor.

Teilaufgabe Teil 2 1b (4 BE)

Zeigen Sie, dass für die Entfernung $d(x)$ des Punkts $Q(x|f(x))$ vom Punkt $P(1,5|0)$ gilt: $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5,25}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b

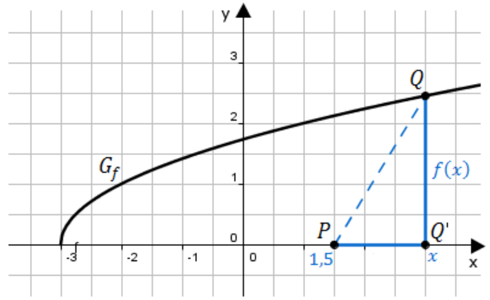
Abstand zweier Punkte

$f(x) = \sqrt{x+3}$

$P(1,5|0)$

$Q(x|f(x))$

$Q'(x|0)$



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $PQ'Q$ mit der Basis $\overline{PQ'} = x - 1,5$ und Höhe $\overline{QQ'} = f(x)$. Nach dem Satz des Pythagoras, gilt:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PQ'}^2 + \overline{QQ'}^2$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x-1,5)^2 + \left(\sqrt{x+3}\right)^2}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{x^2 - 3x + 2,25 + x + 3}$$

$$\Rightarrow \quad d(x) = \overline{PQ} = \sqrt{x^2 - 2x + 5,25}$$

Teilaufgabe Teil 2 1c (7 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten desjenigen Graphenpunkts $Q_E\ (x_E|y_E)$, der von P den kleinsten Abstand hat. Tragen Sie Q_E in Abbildung 1 ein.
(zur Kontrolle: $x_E = 1$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1c

Extremwertaufgabe

Abstandsfunktion: $\quad d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5,25} = \left(x^2 - 2x + 5,25\right)^{\frac{1}{2}}$

Erste Ableitung bilden:

$d'(x) = \left[\left(x^2 - 2x + 5,25\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = x^2 - 2x + 5,25$.
Dann ist $v'(x) = 2x - 2$.

$d'(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 5,25\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2)$

$d'(x) = \dfrac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 5,25}}$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x_E erfüllt sein:

$f'\,(x_E) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$d'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 5,25}} = 0$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht mit einer Nullstelle des Nenners übereinstimmen darf(hebbare Lücke).

Hier besitzt die Nennerfunktion $2\sqrt{x^2 - 2x + 5,25}$ keine Nullstelle, da die Diskriminante D der quadratischen Funktion $x^2 - 2x + 5,25$ negativ ist:

$D = b^2 - 4a\,c = 4 - 4 \cdot 5,25 < 0$

$\Rightarrow \quad 2x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_E = 1$

$\Rightarrow \quad y_E = f(x_E) = f(1) = \sqrt{1 + 3} = 2$

$\Rightarrow \quad Q_E(1|2)$

Prüfen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\dfrac{3}{5} > 0$ oder $\dfrac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\dfrac{-3}{5} < 0$ oder $\dfrac{3}{-5} < 0$)

Hier ist die Nennerfunktion $2\sqrt{x^2 - 2x + 5,25}$ positiv, da die Diskriminante D der quadratischen Funktion $x^2 - 2x + 5,25$ negativ ist:

$D = b^2 - 4a\,c = 4 - 4 \cdot 5,25 < 0$

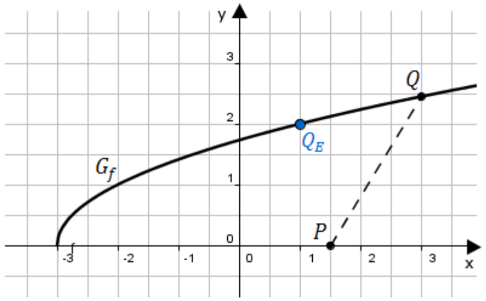
$\dfrac{2x - 2}{2\sqrt{\underbrace{x^2 - 2x + 5,25}_{>0}}} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$

$$\frac{2x-2}{2\sqrt{\underbrace{x^2-2x+5,25}_{>0}}} < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x-2<0 \quad\Rightarrow\quad x<1$$

An der Stelle $x = 1$ wechselt die erste Ableitung ihr Vorzeichen von $(-)$ nach $(+)$.

$\Rightarrow \quad Q_E(1|2) \quad$ Minimum

Skizze

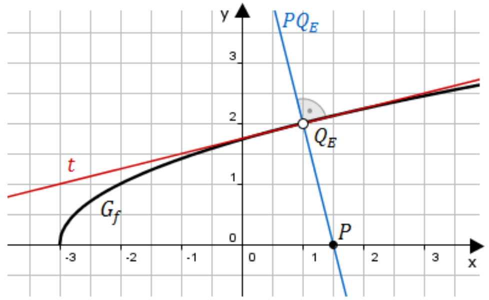


Teilaufgabe Teil 2 1d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Verbindungsstrecke $[PQ_E]$ und die Tangente an G_f im Punkt Q_E senkrecht zueinander sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1d

Geradengleichung aufstellen



$P(1,5|0)$, $Q_E(1|2)$

Steigung m_{PQ_E} der Geraden PQ_E bestimmen:

> Erläuterung: *Steigung einer Geraden*
>
> Die Steigung m einer Geraden, die durch die Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ verläuft, ist gegeben durch:
>
> $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{PQ_E} = \frac{2-0}{1-1,5} = -4$$

Tangentengleichung ermitteln

Steigung m_t der Tangete t an G_f im Punkt Q_E bestimmen:

$$f(x) = \sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$$

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{(x+3)}}$$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

$$m_t = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$$

Lagebeziehung von Geraden

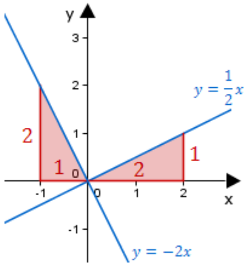
Nachweis, dass die Geraden senkrecht zueinander stehen:

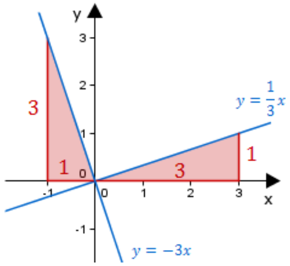
Erläuterung: *Senkrechte Geraden*

Zwei Geraden stehen senkrecht zueinander genau dann, wenn das Produkt ihrer Steigungen gleich -1 ist:

$m_1 \cdot m_2 = -1.$

Beispiele:





$m_1 = -2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$m_1 = -3$; $m_2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$

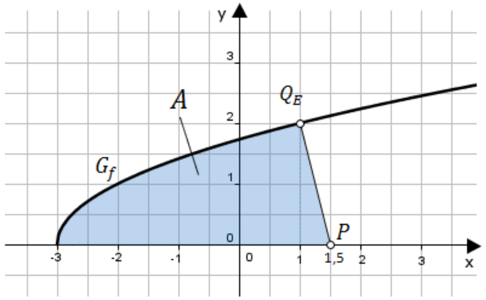
$$m_{PQ_E} \cdot m_t = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$$

Teilaufgabe Teil 2 1e (6 BE)

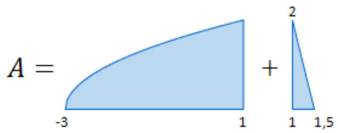
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f , der x-Achse und der Strecke $[P\,Q_E]$ begrenzt wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1e

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen -3 und 1 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A_{Integral} = \int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{dx}$$

Die restliche Fläche entspricht dem Flächeninhalt eines Dreiecks mit Höhe 2 und Länge $0,5$.

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$\begin{aligned} A &= A_{Integral} + A_{Dreieck} \\ &= \int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{dx} + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \\ &= \int_{-3}^{1} \sqrt{x+3}\,\mathrm{dx} + 0,5 \\ &= \int_{-3}^{1} (x+3)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dx} + 0,5 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Stammfunktion von $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ wird so gebildet, wie bei einer Polynomfunktion:

$$\int x^n \,\mathrm{dx} = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

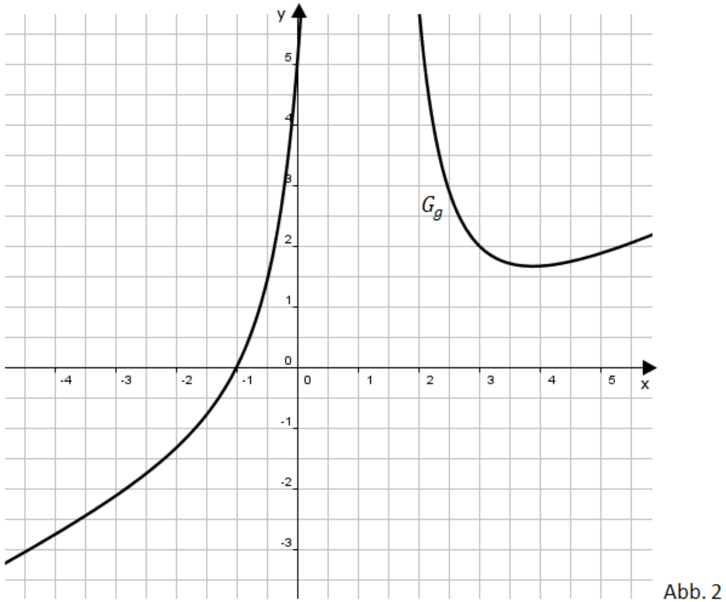
$$\begin{aligned} &= \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1} + 0,5 \\ &= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}\right]_{-3}^{1} + 0,5 \\ &= \frac{16}{3} - 0 + 0,5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{35}{6}$$

Teilaufgabe Teil 2 2a (6 BE)

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierten gebrochenrationalen Funktion g mit folgenden Eigenschaften:

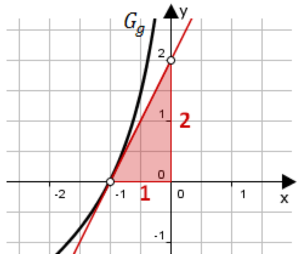
- Die Funktion g hat in $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel;
- G_g verläuft stets oberhalb seiner schrägen Asymptote, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ gegeben ist;
- die einzige Nullstelle von g ist $x = -1$.



Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 näherungsweise den Wert der Ableitung g' von g an der Stelle $x = -1$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.
Aus der Gleichung der schrägen Asymptote ergibt sich unmittelbar das Verhalten der Ableitung g' für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie dieses Verhalten an und skizzieren Sie den Graphen von g' in Abbildung 2.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a]

Steigung eines Funktionsgraphen



(Ausschnitt von Abbildung 2: Tangente am Graphen an der Stelle $x = -1$ mit Steigungsdreieck)

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

Steigung der Tangente am Graphen G_g an der Stelle $x = -1$:

$m \approx \frac{2}{1} = 2$

$\Rightarrow \quad g'(-1) \approx 2$

Grenzwert bestimmen

Asymptote: $\quad y = \frac{1}{2}x - 1$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Für immer größer werdende x-Werte, nähert sich der Graph von g der Geraden (Asymptote) $y = \frac{1}{2}x - 1$.

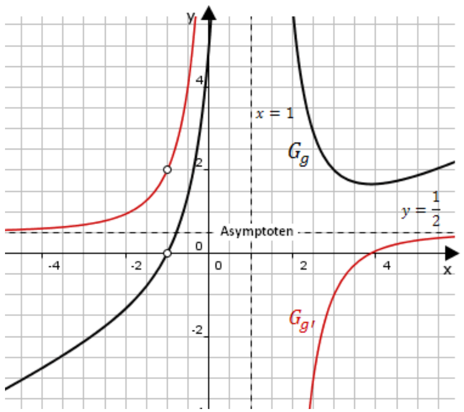
Dies bedeutet, dass sich auch die Tangenten an den Graphen von g der Asymptoten nähern; sie nehmen somit die gleiche Steigung an.

Da die Steigung der Tangente gleich dem Wert der ersten Ableitung ist, gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} g'(x) = \frac{1}{2}$$

Skizze



Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Die Funktion g hat eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

I $\quad y = x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$ $\qquad$ II $\quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{x-1}$ $\qquad$ III $\quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.
Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Bestimmen Sie den passenden Wert von a.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b

Markante Eigenschaften von Funktionen

Aus Teilaufgabe 2a ist bekannt:

- Die Funktion g hat in $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel
- $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist schräge Asymptote
- die einzige Nullstelle von g ist $x = -1$

Erläuterung: *Grenzwert*

Gleichung der schrägen Asymptote:

$$\lim_{x \to \infty} x - 1 + \underbrace{\frac{a}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to\infty}}}_{\to 0} = x - 1$$

Form I kommt nicht in Frage, da die schräge Asymptote $y = x - 1$ lauten würde.

Erläuterung: *Polstelle*

Die Nennerfunktion $x - 1$ der Form II hat eine einfache Nullstelle $x = 1$. Das Vorzeichen der Funktion ändert sich an dieser Stelle.

Form II kommt nicht in Frage, da die Funktion in $x = 1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel hat.

Form III: $\quad g(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$

$g(-1) = 0$

$-\frac{1}{2} - 1 + \frac{a}{4} = 0$

$\frac{a}{4} = \frac{3}{2}$

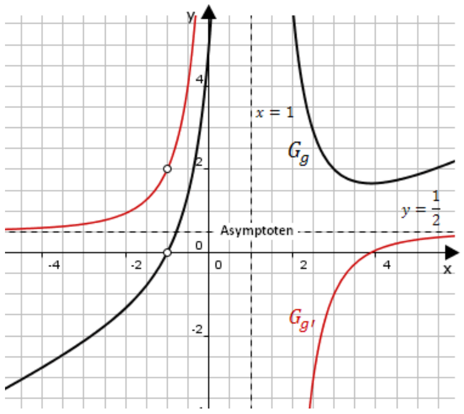
$\Rightarrow \quad a = 6$

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Betrachtet wird nun die Funktion h mit $h(x) = \ln\,(g(x))$. Geben Sie mithilfe des Verlaufs von G_g die maximale Definitionsmenge D_h von h, das Verhalten von h an den Grenzen von D_h sowie einen Näherungswert für die Nullstelle von h an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2c

Definitionsbereich bestimmen



Verlauf von G_g:

G_g ist negativ für $x \in]-\infty; -1[$

G_g ist positiv für $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$h(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(g(x))$.

Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
Somit gilt für die Argumentfunktion: $g(x) > 0$.

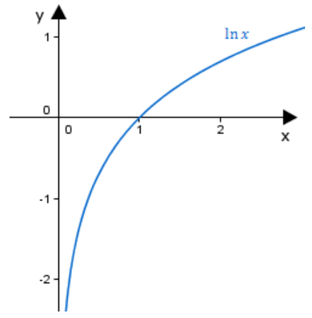
$\Rightarrow \quad D_h =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

Grenzwerte bilden:

Erläuterung: *ln-Funktion*

Graph der ln-Funktion:



Am Graphen der ln-Funktion lässt sich der Grenzwert ablesen.

$$\lim_{x\to -1^+} \ln\left(\underbrace{g(x)}_{\to 0}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\underbrace{g(x)}_{\to \infty}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \ln \left(\underbrace{g(x)}_{\to \infty} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln \left(\underbrace{g(x)}_{\to \infty} \right) = \infty$$

Nullstellen einer Funktion

Nullstelle von h bestimmen:

> Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*
>
> Da $\ln 1 = 0$, nimmt die Logarithmusfunktion $\ln(g(x))$ den Wert Null an, wenn das Argument $g(x) = 1$ ist.

$$\ln(g(x)) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(x) = 1$$

> Erläuterung: *Wert aus Zeichung ablesen*
>
> Der x-Wert wird am Graphen von g abgelesen.

$x \approx -0,6$