Abitur 2011 G8 Abitur Mathematik Geometrie VI

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|7|3)$, $B(6|-7|1)$ und $C(-2|1|-3)$ gegeben.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck festlegen, dessen Hypotenuse die Strecke $[AB]$ ist und dessen kürzere Kathete die Länge 9 hat.

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Alle Punkte $C^\star$ im Raum, die zusammen mit A und B ein zum Dreieck ABC kongruentes Dreieck festlegen, bilden zwei gleich große Kreise.
Beschreiben Sie (z. B. durch eine Skizze) die Lage der beiden Kreise bezüglich der Strecke $[AB]$ und ermitteln Sie den Radius der beiden Kreise.

Das Dreieck ABC aus Aufgabe 1a ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide $ABCS$ mit der Spitze $S(11,5|4|-6)$.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Die Grundfläche der Pyramide liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
(*mögliches Ergebnis*: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$)

Teilaufgabe 1d (7 BE)

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Seitenkante $[BS]$ gegen die Ebene E sowie das Volumen V der Pyramide.
(*Teilergebnis*: $V = 216$)

Teilaufgabe 1e (3 BE)

Welche Lagebeziehung muss eine Gerade zur Ebene E haben, wenn für jeden Punkt P dieser Geraden die Pyramide $ABCP$ das gleiche Volumen wie die Pyramide $ABCS$ besitzen soll? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe 1f (7 BE)

Der Umkreis des Dreiecks ABC und der Punkt S legen einen Kegel fest. Zeigen Sie, dass es sich um einen geraden Kegel handelt, der Mittelpunkt des Grundkreises also zugleich der Höhenfußpunkt des Kegels ist.
Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Kegels größer ist als das Volumen der Pyramide $ABCS$.

Lösung

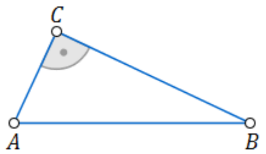
Teilaufgabe 1a (4 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|7|3)$, $B(6|-7|1)$ und $C(-2|1|-3)$ gegeben.

Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck festlegen, dessen Hypotenuse die Strecke $[AB]$ ist und dessen kürzere Kathete die Länge 9 hat.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Länge eines Vektors



Vektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Länge der Seiten des Dreiecks ABC bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 196 + 4} = \sqrt{225} = 15$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 64 + 16} = \sqrt{144} = 12$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

$\Rightarrow$ Die kürzere Kathete hat die Länge 9.

Nachweis - rechtwinkliges Dreieck

Nachweis über den Satz des Pythagoras:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt:

$a^2 + b^2 = c^2$

Die Umkehrung des Satzes ist auch gültig:

Erfüllen die Längen der Seiten eines Dreiecks die obige Gleichung, so ist das Dreieck rechtwinklig.

$15^2 \overset{!}{=} 12^2 + 9^2$

$225 = 144 + 81$

$225 = 225$ (wahre Aussage)

$\Rightarrow$ Die Punkte A, B und C bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C.

Alternative Lösung

Nachweis über das Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 24 - 48 + 24 = 0$$

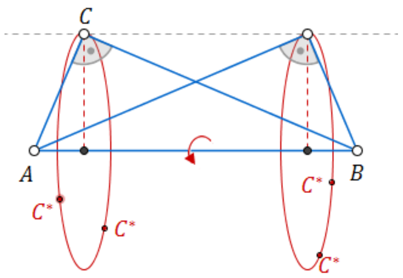
$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Alle Punkte C^* im Raum, die zusammen mit A und B ein zum Dreieck ABC kongruentes Dreieck festlegen, bilden zwei gleich große Kreise.
Beschreiben Sie (z. B. durch eine Skizze) die Lage der beiden Kreise bezüglich der Strecke $[AB]$ und ermitteln Sie den Radius der beiden Kreise.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Lage eines Punktes



Erläuterung: *Kongruente Dreiecke*

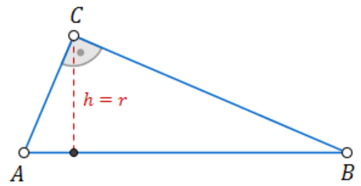
Kongruente Dreiecke sind deckungsgleiche Dreiecke, d.h. sie passen genau aufeinander.

Aus einem gegebenen Dreieck gehen kongruente Dreiecke hervor, wenn man dieses dreht, verschiebt und/oder auch spiegelt.

In dieser Aufgabe stellt man sich vor, dass sich das Dreieck ABC um die Seite $[AB]$ dreht. Der Punkt C bewegt sich somit entlang eines Kreises mit Mittelpunkt auf der Seite $[AB]$. All die Dreiecke, die durch diese Rotation entstehen, sind kongruent zum Dreieck ABC.

Ein weiteres kongruentes Dreieck entsteht wenn man das Dreieck ABC an der Mittelsenkrechten der Seite $[AB]$ spiegelt. Dieses Dreieck kann dann wiederum auch gedreht werden.

Radius eines Kreises bestimmen



Aus Teilaufgabe 1a: $\overline{AB} = 15\,,\ \overline{AC} = 9\,,\ \overline{BC} = 12$

Flächeninhalt des Dreiecks:
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$

Flächeninhalt des Dreiecks mit der Höhe h über die Hypotenuse:
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot [AB] \cdot h$

$54 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h$

$\Rightarrow \quad h = \frac{54 \cdot 2}{15} = 7{,}2$

Der Radius des Kreises ist gleich der Höhe des Dreiecks über die Hypotenuse.

$\Rightarrow \quad r = 7,2$

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Das Dreieck ABC aus Aufgabe 1a ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide $ABCS$ mit der Spitze $S(11,5|4|-6)$.

Die Grundfläche der Pyramide liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
(*mögliches Ergebnis*: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Ebene aus drei Punkte

$A(1|7|3),\ B(6|-7|1),\ C(-2|1|-3)$

Richtungsvektoren der Ebene E (siehe Teilaufgabe 1a):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

A sei der Aufpunkt der Ebene.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n}_E$ der Ebene E aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 36 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalenform der Ebene E:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$

Hier (A ist Aufpunkt):

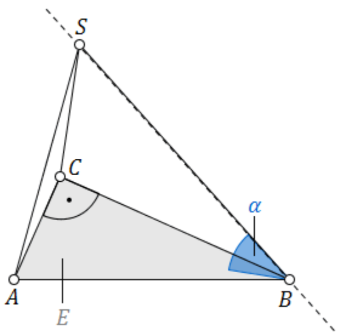
$$E: \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$$

Teilaufgabe 1d (7 BE)

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Seitenkante $[BS]$ gegen die Ebene E sowie das Volumen V der Pyramide.
(*Teilergebnis*: $V = 216$)

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Winkel zwischen Gerade und Ebene



Gegeben (aus vorherigen Teilaufgaben):

$B(6|-7|1)$, $S(11,5|4|-6)$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Normalenvektor der Ebene E)

$\overline{AC} = 9$, $\overline{BC} = 12$

$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

Gesucht: Neigungswinkel α.

Ansatz: Neigungswinkel ist gleich dem Schnittwinkel einer Geraden durch B und S mit der Ebene E.

Vektor $\overrightarrow{BS}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 11,5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren $\overrightarrow{BS}$ und $\overrightarrow{n_E}$ bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

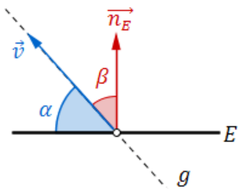
$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 5,5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{30,25 + 121 + 49} = \sqrt{200,25}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

Winkel α bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*



Der Winkel α zwischen einer Ebene E und einer Geraden g entspricht dem von 90° abgezogenen Winkel β zwischen dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden.

Für den **Sinus** des Winkels α gilt dann:

$$\sin\alpha = \frac{\vec{v} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{BS} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{BS}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 5,5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{200,25} \cdot 3}$$

$$\sin\alpha = \frac{36}{3\sqrt{200,25}}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{36}{3\sqrt{200,25}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 58^\circ$$

Abstand Punkt - Ebene

Höhe h der Pyramide (entspricht dem Abstand der Spitze S zur Ebene E) bestimmen:

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{HNF}: \frac{1}{3} \cdot (2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3) = 0$$

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$P(1|3|-6)$$

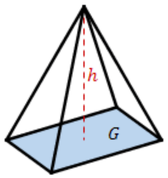
$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$h = d(S,E) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 11,5 + 4 - 2 \cdot (-6) - 3) = 12$$

Volumen einer Pyramide

Volumen der Pyramide bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}\right) \cdot h$$

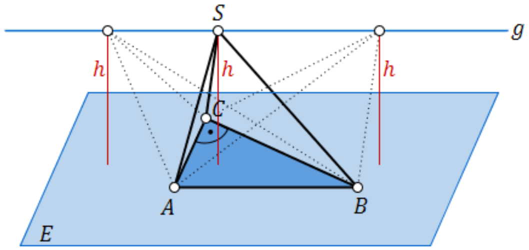
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 12 = 216$$

Teilaufgabe 1e (3 BE)

Welche Lagebeziehung muss eine Gerade zur Ebene E haben, wenn für jeden Punkt P dieser Geraden die Pyramide $ABCP$ das gleiche Volumen wie die Pyramide $ABCS$ besitzen soll? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Lagebeziehung Gerade und Ebene



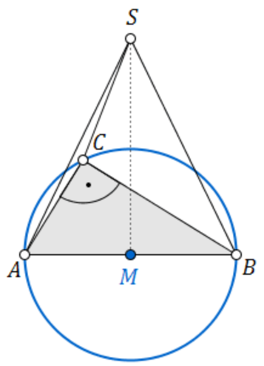
Die Gerade (g in der Skizze) muss parallel zur Ebene E verlaufen. Jeder Punkt P auf dieser Geraden hat den gleichen Abstand zur Ebene E. Dieser Abstand entspricht der Höhe der Pyramide.

Teilaufgabe 1f (7 BE)

Der Umkreis des Dreiecks ABC und der Punkt S legen einen Kegel fest. Zeigen Sie, dass es sich um einen geraden Kegel handelt, der Mittelpunkt des Grundkreises also zugleich der Höhenfußpunkt des Kegels ist.
Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Kegels größer ist als das Volumen der Pyramide $ABCS$.

Lösung zu Teilaufgabe 1f

Mittelpunkt einer Strecke



Erläuterung: *Thaleskreis*

Das Dreieck ABC ist bei C rechtwinklig. Der Umkreis (alle 3 Ecken liegen auf dem Kreis) ist somit der Thaleskreis.

Der Mittelpunkt M des Kreises ist also der Mittelpunkt der Hypotenuse $[AB]$.

(im Allgemeinen ist der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten)

Mittelpunkt M des Umkreises (Thaleskreis) bestimmen:

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[AB]$ ist stets gegeben durch:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad M(3,5|0|2)$

Lagebeziehung von Vektoren

Vektor $\overrightarrow{MS}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 11,5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Gerader Kegel*

Liegt ein gerader Kegel vor, so steht die Verbindungsstrecke zwischen Spitze und Mittelpunkt des Grundkreises (hier der Vektor $\overrightarrow{MS}$) senkrecht zur Grundfläche (hier die Ebene E - $\overrightarrow{AB}$ ist ein Richtungsvektor)

Prüfen ob der Vektor $\overrightarrow{MS}$ senkrecht zur Ebene E steht:

Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht selbst senkrecht zur Ebene.

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \overrightarrow{n_E}$$

$\overrightarrow{MS}$ ist ein Vielfaches vom Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$.

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MS} \perp E$

$\Rightarrow \quad M$ ist Höhenfußpunkt des Kegels

Volumen eines Kegels

Radius r des Kegels: $\quad r = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5$

Höhe h des Kegels: $\quad h = |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{64 + 16 + 64} = \sqrt{144} = 12$

Volumen des Kegels bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*

Das Volumen eines Kegels ist gegeben durch:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

wobei G die Grundfläche ist und h die Höhe des Kegels.

$$\begin{aligned} V_{\text{Kegel}} &= \frac{1}{3} \cdot r^2\,\pi \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot (7,5)^2 \pi \cdot 12 \\ &\approx 706,86 \ \text{(VE)} \end{aligned}$$

Prozentualer Unterschied:

$$\frac{V_{\text{Kegel}} - V_{\text{Pyramide}}}{V_{\text{Pyramide}}} = \frac{706,86 - 216}{216} \approx 2,272$$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Kegels ist um $227,2\%$ größer als das Volumen der Pyramide