Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik GK Stochastik III

An einem Musikwettbewerb, der aus einer Messehalle bundesweit live im Fernsehen übertragen wird, nehmen zwölf Nachwuchsbands aus ganz Deutschland teil. Genau zwei davon, München Motel und Bavarian King, stammen aus Bayern. Die eine Hälfte der Bands singt ausschließlich Lieder mit englischen Texten, die andere ausschließlich Lieder mit deutschen Texten.

In der ersten Runde des Wettbewerbs treten die zwölf Bands nacheinander mit jeweils einem Lied auf; die Reihenfolge der Auftritte wird ausgelost. Nach den ersten sechs Auftritten findet eine Pause statt.

Teilaufgabe 1a (2 BE)

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Auftritte?

Teilaufgabe 1b (2 BE)

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Auftritte, wenn nur danach unterschieden wird, ob eine Band aus Bayern stammt oder nicht?

Teilaufgabe 1c (9 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

A: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause auf.“

B: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause direkt nacheinander auf.“

C: „Deutsch und englisch singende Bands treten abwechselnd auf.“

Die Bewertung der Auftritte der ersten Runde erfolgt mithilfe einer Zuschauerabstimmung im Internet. Jeder Zuschauer kann höchstens einmal abstimmen und muss zur Abgabe seines Votums genau drei von ihm favorisierte Bands auswählen. Bei 41% der zahlreichen abgegebenen Voten wird mindestens eine bayerische Band ausgewählt, München Motel bei 31% und Bavarian King bei 22% der Voten.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde München Motel ausgewählt.“ und „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde Bavarian King ausgewählt.“ stochastisch unabhängig sind.

Teilaufgabe 2b (6 BE)

Unter allen Zuschauern, die ein Votum abgaben, werden 20 Freikarten für ein Konzert der späteren Siegerband verlost. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei der 20 ausgelosten Zuschauer Bavarian King auswählten.

Die Auftritte der zweiten Runde bewerten die Zuschauer durch eine telefonische Abstimmung. Dabei können bei jedem Anruf 1000 Euro gewonnen werden; die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt jeweils $0,02\%$.

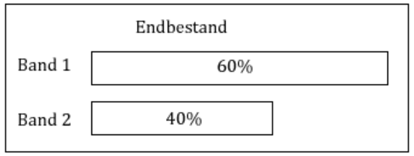
Teilaufgabe 3a (4 BE)

Die bei jedem Anruf anstehende Entscheidung, ob ein Gewinn erzielt wird oder nicht, soll für 800 nacheinander ankommende Anrufe simuliert werden. Beschreiben Sie ein dafür geeignetes Urnenexperiment.

Teilaufgabe 3b (6 BE)

Ein Zuschauer möchte durch mehrfaches Anrufen seine Chance auf einen Gewinn vergrößern. Welchen Betrag müsste er wenigstens investieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal zu gewinnen, wenn jeder Anruf 50 Cent kostet?

Für das Finale der beiden bisher am besten bewerteten Bands haben sich München Motel und Bavarian King qualifiziert. Nach deren Finalauftritten entscheiden die Zuschauer im Rahmen einer erneuten telefonischen Abstimmung über den Sieger des Wettbewerbs; bei jedem Anruf ist nur der favorisierte Finalist zu nennen. Bevor die bereits feststehende Entscheidung bekannt gegeben wird, wird die Sendung ein letztes Mal für einen längeren Werbeblock unterbrochen. Für die Hallen- und Fernsehzuschauer wird unmittelbar vor dieser Werbeunterbrechung folgende Graphik eingeblendet (die zu den Anteilen gehörenden Bandnamen werden bewusst noch nicht angezeigt).



Ein Fan von München Motel vermutet, dass seine Band schließlich als Sieger ausgezeichnet wird. Da er sich nicht bis zur Bekanntgabe der Entscheidung gedulden will, nutzt er die Unterbrechung, um seine Vermutung zu testen. Dazu befragt er 25 der zahlreichen Hallenzuschauer und lässt sich von diesen den jeweils favorisierten Finalisten nennen.

Teilaufgabe 4a (2 BE)

Geben Sie zwei mögliche Gründe dafür an, dass diese Befragung nicht geeignet sein könnte, die Vermutung der Fans zu testen.

Teilaufgabe 4b (5 BE)

Da der Fan möglichst vermeiden will, sich aufgrund seines Testergebnisses irrtümlich über einen Erfolg von München Motel zu freuen, soll die Wahrscheinlichkeit dafür höchstens 10% betragen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel unter der Annahme, dass die Befragung geeignet ist, die Vermutung des Fans zu testen. Die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich Bavarian King als Sieger vorherzusagen, soll möglichst klein sein.

Lösung

Teilaufgabe 1a (2 BE)

An einem Musikwettbewerb, der aus einer Messehalle bundesweit live im Fernsehen übertragen wird, nehmen zwölf Nachwuchsbands aus ganz Deutschland teil. Genau zwei davon, München Motel und Bavarian King, stammen aus Bayern. Die eine Hälfte der Bands singt ausschließlich Lieder mit englischen Texten, die andere ausschließlich Lieder mit deutschen Texten.

In der ersten Runde des Wettbewerbs treten die zwölf Bands nacheinander mit jeweils einem Lied auf; die Reihenfolge der Auftritte wird ausgelost. Nach den ersten sechs Auftritten findet eine Pause statt.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Auftritte?

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Kombinatorik

Es gibt $12! = 479.001.600$ verschiedene Möglichkeiten für die Reihenfolge der Auftritte.

$$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{7}\,\boxed{8}\,\boxed{9}\,\boxed{10}\,\boxed{11}\,\boxed{12}$$

Erläuterung: *Permutation*

Die 12 Auftritte lassen sich auf $12!$ verschiedene Arten anordnen (permutieren).

Die Pause spielt keine Rolle.

Teilaufgabe 1b (2 BE)

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Auftritte, wenn nur danach unterschieden wird, ob eine Band aus Bayern stammt oder nicht?

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Kombinatorik

$$|A| = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \binom{12}{2} = 66$$

Erläuterung: *Permutation*

Wie in Teilaufgabe 1a) zu lesen ist, lassen sich die 12 Auftritte auf 12! verschiedene Arten anordnen (permutieren).

Da jedoch nur danach unterschieden wird, ob eine Band aus Bayern stammt oder nicht, müssen von den 12! Möglichkeiten, diejenigen ausgeschlossen werden, die zu viel gezählt werden (da eine Reihenfolge von Bands aus Bayern oder Nicht-Bayern nicht mehr wichtig ist). Das sind 2! Möglichkeiten für die bayerischen Bands und 10! für die restlichen Bands.

Man nennt diese Situation „Permutation ohne Reihenfolge“.
(MISSISSIPPI - Aufgabe)

Teilaufgabe 1c (9 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

A: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause auf.“

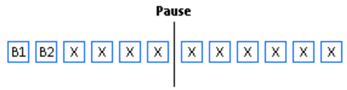
B: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause direkt nacheinander auf.“

C: „Deutsch und englisch singende Bands treten abwechselnd auf.“

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

A: „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause auf“



Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Es handelt sich hier um Ziehen ohne Reihenfolge (an welcher Stelle eine Band vor der Pause spielt ist irrelevant) und ohne Zurücklegen (eine Band spielt nur einmal).

Stichwort: „Lottoprinzip“ bzw. hypergeometrische Verteilung:

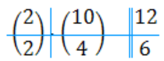
$$P(X) = \frac{\text{Anzahl Treffer} \cdot \text{Anzahl Nieten}}{|\Omega|}$$

2 bayerische Bands treten vor der Pause auf:
$\Rightarrow |\text{Treffer}| = \binom{2}{2}$

4 (aus insgesamt 10) weitere Bands treten vor der Pause auch auch auf:
$\Rightarrow |\text{Nieten}| = \binom{10}{4}$

6 Bands werden aus 12 gezogen:
$\Rightarrow |\Omega| = \binom{12}{6}$

Merkhilfe zur Kontrolle:



$$P(A) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{5}{22} \approx 22,7\%$$

Alternative Lösung

Erläuterung:

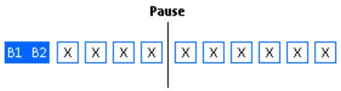
Es gibt 6 Möglichkeiten die erste bayerische Band auf den ersten 6 Startplätzen zu platzieren. Ist dieser Startplatz besetzt, so bleiben 5 Möglichkeiten für die zweite bayerische Band. Für die restlichen 10 Bands gibt es dann 10! mögliche Anordnungen.

Insgesamt gibt es 12! Möglichkeiten für die Reihenfolge der Auftritte (siehe Teilaufgabe 1a).

$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 10!}{12!} \approx 22,7\%$

Wahrscheinlichkeit

B : „Die beiden bayerischen Bands treten vor der Pause direkt nacheinander auf.“



Erläuterung:

Die beiden bayerischen Bands treten nacheinander auf, also gibt es 2! mögliche Reihenfolgen (erst B1, dann B2 oder umgekehrt). Der Block, den die bayerischen Bands bilden, kann 5 mal unter den ersten 6 Startplätzen durchgeschoben werden. Für die restlichen 10 Bands gibt es dann 10! mögliche Anordnungen.

Insgesamt gibt es 12! Möglichkeiten für die Reihenfolge der Auftritte (siehe Teilaufgabe 1a).

$|B| = 2! \cdot 5 \cdot 10!$

$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{2! \cdot 5 \cdot 10!}{12!} = \frac{5}{66} \approx 7,6\%$

Alternative Lösung

Erläuterung: *Laplace-Wahrscheinlichkeit*

Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit (jede Band wird mit derselben Wahrscheinlichkeit gelost) gilt:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ günstige Fälle} \\ \leftarrow \text{ mögliche Fälle} \end{array}$$

Günstige Fälle:
Vor der Pause nacheinander Auftreten können die beiden bayerischen Bands im Falle, dass sie für die 1. und 2. Stelle oder 2. und 3. Stelle oder 3. und 4. Stelle oder 4. und 5. Stelle oder auch für die 5. und 6. Stelle ausgelost werden. Das sind 5 günstige Fälle.

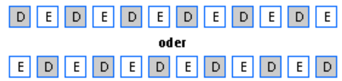
$\Rightarrow |B| = 5$

Mögliche Fälle:
Da nur danach unterschieden wird, ob eine Band aus Bayern kommt oder nicht, entsprechen die möglichen Fälle der in Teilaufgabe 1b) berechneten Anzahl der Möglichkeiten für die Reihenfolge der Auftritte.

$\Rightarrow |\Omega| = \binom{12}{2}$

$P(B) = \frac{5}{\binom{12}{2}} \approx 7,6\%$

C : „Deutsch und englisch singende Bands treten abwechselnd auf. “



Erläuterung:

Es gibt $6!$ verschiedene Möglichkeiten die 6 auf deutsch singenden Bands auf ihre Plätze anzuordnen. Gleiches gilt für die 6 auf englisch singenden Bands.
Als Erste kann entweder eine deutsch oder eine englisch singende Band auftreten, also 2 verschiedene Anordnungen.

Anders formuliert:
Es gibt 6 verschiedene Bands die auf dem ersten und zweiten Platz angeordnet werden können (1xD aus 6 und 1xE aus 6 oder umgekehrt), 5 für den dritten und vierten Platz, 4 für den fünften und sechsten Platz, 3 für den siebten und achten Platz, etc...

$$\Rightarrow \quad \left(\underbrace{6}_{1}\cdot\underbrace{6}_{2}\cdot\underbrace{5}_{3}\cdot\underbrace{5}_{4}\cdot\underbrace{4}_{5}\cdot\underbrace{4}_{6}\cdot\underbrace{3}_{7}\cdot\underbrace{3}_{8}\cdot\underbrace{2}_{9}\cdot\underbrace{2}_{10}\cdot\underbrace{1}_{11}\cdot\underbrace{1}_{12}\right)\cdot 2$$

Insgesamt gibt es $12!$ Möglichkeiten für die Reihenfolge der Auftritte (siehe Teilaufgabe 1a).

$|C| = (6!\cdot 6!)\cdot 2$

$$\Rightarrow \quad P(C) = \frac{6!\cdot 6!\cdot 2}{12!} = \frac{1}{462} \approx 0,22\%$$

Alternative Lösung

Erläuterung: *Laplace-Wahrscheinlichkeit*

Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit (jede Band wird mit derselben Wahrscheinlichkeit gelost) gilt:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|}\begin{array}{l}\leftarrow \text{ günstige Fälle}\\ \leftarrow \text{ mögliche Fälle}\end{array}$$

Günstige Fälle:
Es gibt nur 2 güstige Fälle:
DEDED.... oder EDEDE...

$\Rightarrow |C| = 2$

Mögliche Fälle:
Sie entsprechen, analog zur Teilaufgabe 1b), der Anzahl der Möglichkeiten für die Reihenfolge der Auftritte wenn nur danach unterschieden wird, ob eine Band auf deutsch oder auf englisch singt (jeweils 6 Bands singen in einer Sprache).

$$\Rightarrow |\Omega| = \frac{12!}{6!\cdot 6!} = \binom{12}{6}$$

$$P(C) = \frac{2}{\binom{12}{6}} \approx 0,22\%$$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Die Bewertung der Auftritte der ersten Runde erfolgt mithilfe einer Zuschauerabstimmung im Internet. Jeder Zuschauer kann höchstens einmal abstimmen und muss zur Abgabe seines Votums genau drei von ihm favorisierte Bands auswählen. Bei 41% der zahlreichen abgegebenen Voten wird mindestens eine bayerische Band ausgewählt, München Motel bei 31% und Bavarian King bei 22% der Voten.

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde München Motel ausgewählt.“ und „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde Bavarian King ausgewählt.“ stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Stochastische Unabhängigkeit

M : „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde München Motel ausgewählt.“

B : „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde Bavarian King ausgewählt.“

Aus der Einleitung der Teilaufgabe entnimmt man:

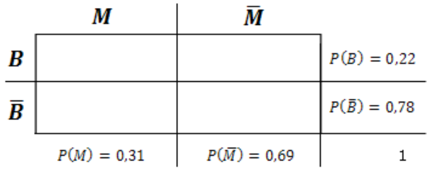
$P(M) = 31\% = 0,31$

$P(B) = 22\% = 0,22$

Erläuterung: *Gegenereignis*

$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,31 = 0,69$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,22 = 0,78$

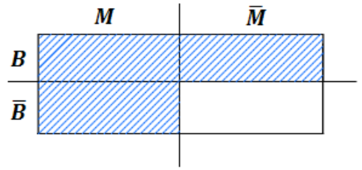


Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse*

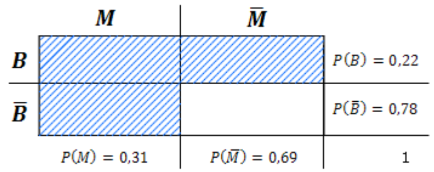
„Bei 41% der zahlreichen abgegebenen Voten wird mindestens eine bayerische Band ausgewählt...“

Das bedeutet, bei 41% der Voten wird entweder München Motel ausgewählt oder Bavarian King oder beide.

Dies entspricht der Situation: $M \cup B$



$P(M \cup B) = 41\% = 0,41$



$$\begin{aligned} \text{Schraffiert} &= P(M \cup B) \\ &= 1 - P(\overline{M} \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P(\overline{M} \cap \overline{B}) = 1 - 0,41 = 0,59$

	M	$\overline{M}$	
B			$P(B) = 0{,}22$
$\overline{B}$		$P(\overline{M} \cap \overline{B}) = 0{,}59$	$P(\overline{B}) = 0{,}78$
	$P(M) = 0{,}31$	$P(\overline{M}) = 0{,}69$	1

$$\begin{aligned} P(\overline{M} \cap B) &= P(\overline{M}) - P(\overline{M} \cap \overline{B}) \\ &= 0,69 - 0,59 \\ &= 0,10 \end{aligned}$$

	M	$\overline{M}$	
B		$P(\overline{M} \cap B) = 0{,}10$	$P(B) = 0{,}22$
$\overline{B}$		$P(\overline{M} \cap \overline{B}) = 0{,}59$	$P(\overline{B}) = 0{,}78$
	$P(M) = 0{,}31$	$P(\overline{M}) = 0{,}69$	1

$$\begin{aligned} P(M \cap B) &= P(B) - P(\overline{M} \cap B) \\ &= 0,22 - 0,10 \\ &= 0,12 \end{aligned}$$

	M	$\overline{M}$	
B	$P(M \cap B) = 0{,}12$	$P(\overline{M} \cap B) = 0{,}10$	$P(B) = 0{,}22$
$\overline{B}$		$P(\overline{M} \cap \overline{B}) = 0{,}59$	$P(\overline{B}) = 0{,}78$
	$P(M) = 0{,}31$	$P(\overline{M}) = 0{,}69$	1

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse M und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$P(M) \cdot P(B) = 0,31 \cdot 0,22 = 0,0682 \neq 0,12 = P(M \cap B)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse M und B sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 2b (6 BE)

Unter allen Zuschauern, die ein Votum abgaben, werden 20 Freikarten für ein Konzert der späteren Siegerband verlost. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei der 20 ausgelosten Zuschauer Bavarian King auswählten.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Binomialverteilung

$n = 20$ (ausgeloste Zuschauer)

$Z \geq k = 3$ (mindestens 3 mal Bavarian King)

$p = P(B) = 0,22$ (s. Teilaufgabe 2a)
$q = 1 - p = 0,78$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(weniger als k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(Z \geq k) = 1 - P(Z < k)$ bzw. $P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k - 1)$

$P_{0,22}^{20}(Z \geq 3) = 1 - P_{0,22}^{20}(Z \leq 2)$

$P_{0,22}^{20}(Z \geq 3) = 1 - \left[P_{0,22}^{20}(Z=0) + P_{0,22}^{20}(Z=1) + P_{0,22}^{20}(Z=2)\right]$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$q = 1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P_{0,22}^{20}(Z \geq 3) = 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot 0,22^0 \cdot 0,78^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,22^1 \cdot 0,78^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,22^2 \cdot 0,78^{18}\right]$

$P_{0,22}^{20}(Z \geq 3) = 1 - \left[0,78^{20} + 20 \cdot 0,22 \cdot 0,78^{19} + 190 \cdot 0,22^2 \cdot 0,78^{18}\right]$

$P_{0,22}^{20}(Z \geq 3) \approx 0,849 = 84,9\%$

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Die Auftritte der zweiten Runde bewerten die Zuschauer durch eine telefonische Abstimmung. Dabei können bei jedem Anruf 1000 Euro gewonnen werden; die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt jeweils $0,02\%$.

Die bei jedem Anruf anstehende Entscheidung, ob ein Gewinn erzielt wird oder nicht, soll für 800 nacheinander ankommende Anrufe simuliert werden. Beschreiben Sie ein dafür geeignetes Urnenexperiment.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Binomialverteilung

Beispiel eines geeignetem Urnenexperiments:

Urne mit insgesamt 5000 Kugel, 1 ist weiß (Gewinn-Kugel), die anderen 4999 sind schwarz.

800-maliges Ziehen einer Kugel, jeweils mit Zurücklegen.

Erläuterung:

800 sind die Anrufe, also wird das Experiment 800 mal durchgeführt. Die Gewinnwahrscheinlichkeit soll jedes Mal die gleiche sein, deswegen Ziehen mit Zurücklegen.

Damit die Gewinnwahrscheinlichkeit im Urnenexperiment gleich $0,02\%$ ist, muss es (z.B.) eine Gewinn-Kugel geben auf insgesamt 5000, denn:

$p = P(\text{ Gewinn }) = \dfrac{1}{5000} = 0,0002 = 0,02\%.$

Teilaufgabe 3b (6 BE)

Ein Zuschauer möchte durch mehrfaches Anrufen seine Chance auf einen Gewinn vergrößern. Welchen Betrag müsste er wenigstens investieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal zu gewinnen, wenn jeder Anruf 50 Cent kostet?

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Binomialverteilung

$p = P(\text{ Gewinn }) = 0,02\% = 0,0002$
(Gewinnwahrscheinlichkeit, siehe Teilaufgabe 3a)

$q = 1 - p = 0,9998$

Erläuterung:

Der Zuschauer soll mindestens einmal gewinnen, also ist $k = 1$ und $Z \geq k$.

Er soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal gewinnen, also ist der Ansatz:

$P_{0,0002}^{n}(Z \geq 1) > 0,95$

Gesucht ist nun die Anzahl n der Anrufe.

$P_{0,0002}^{n}(Z \geq 1) > 0,95$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_{0,0002}^{n}(Z = 0) > 0,95$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0,9998^n > 0,95$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0,9998^n > 0,95$

$0,9998^n < 1 - 0,95 \qquad |$ logarithmieren

$\ln 0,9998^n < \ln(1 - 0,95)$

$n \cdot \ln 0,9998 < \ln(1 - 0,95) \qquad | : \underbrace{\ln 0,9998}_{<0}$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,9998}$

$n > \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,9998}$

$n > 14977,16$

$\Rightarrow n \geq 14978$

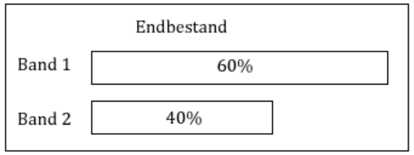
Ein Zuschauer muss mindestens 14978 mal anrufen.

Einsatz $= 14978 \cdot 0,50$ € $= 7489$ €

Ein Zuschauer muss mindestens 7489 € investieren.

Teilaufgabe 4a (2 BE)

Für das Finale der beiden bisher am besten bewerteten Bands haben sich München Motel und Bavarian King qualifiziert. Nach deren Finalauftritten entscheiden die Zuschauer im Rahmen einer erneuten telefonischen Abstimmung über den Sieger des Wettbewerbs; bei jedem Anruf ist nur der favorisierte Finalist zu nennen. Bevor die bereits feststehende Entscheidung bekannt gegeben wird, wird die Sendung ein letztes Mal für einen längeren Werbeblock unterbrochen. Für die Hallen- und Fernsehzuschauer wird unmittelbar vor dieser Werbeunterbrechung folgende Graphik eingeblendet (die zu den Anteilen gehörenden Bandnamen werden bewusst noch nicht angezeigt).



Ein Fan von München Motel vermutet, dass seine Band schließlich als Sieger ausgezeichnet wird. Da er sich nicht bis zur Bekanntgabe der Entscheidung gedulden will, nutzt er die Unterbrechung, um seine Vermutung zu testen. Dazu befragt er 25 der zahlreichen Hallenzuschauer und lässt sich von diesen den jeweils favorisierten Finalisten nennen.

Geben Sie zwei mögliche Gründe dafür an, dass diese Befragung nicht geeignet sein könnte, die Vermutung der Fans zu testen.

Lösung zu Teilaufgabe 4a

Hypothesentest - Annahmebereich und Ablehnungsbereich

Zum Beispiel:

1. Die eingeblendete Graphik entspricht nicht dem Meinungsbild der Hallenzuschauer.

2. Die Stichprobe ist sehr klein.

Teilaufgabe 4b (5 BE)

Da der Fan möglichst vermeiden will, sich aufgrund seines Testergebnisses irrtümlich über einen Erfolg von München Motel zu freuen, soll die Wahrscheinlichkeit dafür höchstens 10% betragen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel unter der Annahme, dass die Befragung geeignet ist, die Vermutung des Fans zu testen. Die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich Bavarian King als Sieger vorherzusagen, soll möglichst klein sein.

Lösung zu Teilaufgabe 4b

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Erläuterung: *Nullhypothese*

Der Fan vermutet zwar, dass die Band München Motel gewinnt, möchte jedoch eine Fehlentscheidung vermeiden mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10%.

Fehlentscheidung bedeutet in diesem Fall, dass die Band München Motel verliert und der Fan sich („irrtümlich“) geirrt hat.

Die Nullhypothese sei also das Verlieren der Band München Motel. Aus der Graphik in der Einleitung zur Teilaufgabe 4 entnimmt man: $p_0 = 40\%$

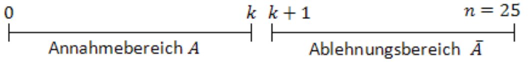
Nullhypothese: $H_0 : p_0 = 40\% = 0,4$

Stichprobenumgang: $n = 25$

Signifikanzniveau: $\alpha = 10\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [0; k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k+1; 25]$



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \geq k+1$)

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,4}^{25}(Z \geq k+1) \leq 0,1$

$P_{0,4}^{25}(Z \geq k+1) \leq 0,1$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k+1 Treffer) = 1 - P(höchstens k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(Z \geq k+1) = 1 - P(Z \leq k)$

$1 - P_{0,4}^{25}(Z \leq k) \leq 0,1$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - P_{0,4}^{25}(Z \leq k) \leq 0,1 \quad | -1$

$-P_{0,4}^{25}(Z \leq k) \leq -0,9 \quad | \cdot(-1)$

$P_{0,4}^{25}(Z \leq k) \geq 0,9$

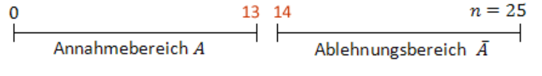
Wichtig: Das Relationszeichen dreht sich um, wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird.

$P_{0,4}^{25}(Z \leq k) \geq 0,9$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k = 13$

$\Rightarrow$ ab $Z = 14$ wird die Nullhypothese abgelehnt.

Entscheidungsregel:



Es muss mindestens 14 Nennungen der Band München Motel geben, damit diese Band als Sieger vorhergesagt wird.