Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik GK Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto (e^x - 2)^2$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von G_f.
[zur Kontrolle: $f''(x) = 4e^x \cdot (e^x - 1)$]

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Zeigen Sie, dass G_f und die durch die Gleichung $y = 4$ gegebene Gerade g genau einen Schnittpunkt $S\ (x_S|y_S)$ besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.
[Teilergebnis: $x_S = 2\ln 2$]

Teilaufgabe 1d (6 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_f. Berechnen Sie $f(-2)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-4 \leq x \leq 1,5$. Tragen Sie auch die Wendetangente und die Gerade g ein.

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an G_f in einem Punkt P, der G_f durchläuft. Geben Sie jeweils alle Werte an, die

α) die Steigung der Tangente

β) der y-Achsenabschnitt der Tangente

dabei annimmt.

Gegeben ist nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $I : x \mapsto \int\limits_{\ln 2}^{x} f(t)dt$.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von I das Monotonieverhalten von I. Zeigen Sie, dass der Graph von I einen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

Teilaufgabe 2b (2 BE)

Geben Sie ohne weitere Rechnung das Verhalten von I für $x \to -\infty$ an.

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 0,5e^{2x} - 4e^x + 4x$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe 3b (7 BE)

Der Graph G_f schließt mit den durch die Gleichungen $y = 4$ bzw. $x = u$ $(u < 0)$ bestimmten Geraden im I. und II. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein. Bestimmen Sie $A(u)$.
Ermitteln Sie $\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (e^x - 2)^2$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = (e^x - 2)^2$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0 \iff (e^x - 2)^2 = 0$

$e^x - 2 = 0 | +2$

$e^x = 2 |$ logarithmieren

$\ln e^x = \ln 2$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^x = 2$ angewendet.

$\ln e^x = \ln 2$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$x = \ln 2$

$\Rightarrow x = \ln 2$

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{e^x}_{\to +\infty} - 2)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (\underbrace{e^x}_{\to 0} - 2)^2 = (-2)^2 = 4$$

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von G_f.
[zur Kontrolle: $f''(x) = 4e^x \cdot (e^x - 1)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f(x) = (e^x - 2)^2, D = \mathbb{R}$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = \left[(e^x - 2)^2\right]'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = e^x + 2.$
Dann ist $v'(x) = e^x.$

$f'(x) = 2 \cdot (e^x - 2) \cdot e^x$

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \iff 2 \cdot (e^x - 2) \cdot \underbrace{e^x}_{>0} = 0$

$e^x - 2 = 0$

$\Rightarrow x^E = \ln 2$ (siehe Teilaufgabe 1a)

$y^E = f\left(x^E\right) = f(\ln 2) = \left(e^{\ln 2} - 2\right)^2 = (2-2)^2 = 0$

$\Rightarrow E(\ln 2|0)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$f''(x) = [2 \cdot (e^x - 2) \cdot e^x]'$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$h(x) = f(x) \cdot g(x) = h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $f(x) = 2(e^x - 2)$ und $g(x) = e^x$

$f''(x) = 2e^x \cdot e^x + 2(e^x - 2) \cdot e^x$

$f''(x) = 2e^x \cdot e^x + 2e^x \cdot e^x - 4e^x$

$f''(x) = 4e^x \cdot e^x - 4e^x$

$f''(x) = 4e^x \cdot (e^x - 1)$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle x^E bestimmen:

$f''(x^E) = f''(\ln 2) = 4e^{\ln 2} \cdot \left(e^{\ln 2} - 1\right) = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 > 0$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$\Rightarrow G_f$ hat an der Stelle $x^E = \ln 2$ ein Tiefpunkt.

Krümmungsverhalten einer Funktion

Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmen:

$f''(x) = 4\underbrace{e^x}_{>0} \cdot (e^x - 1) > 0$

$e^x - 1 > 0| + 1$

$e^x > 1|$ logarithmieren

$\ln e^x > \underbrace{\ln 1}_{0}$

$x > 0$

$\Rightarrow f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$

> Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*
>
> Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.
>
> Es gilt:
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion F negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $F''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion F positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $F''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

$\Rightarrow G_f$ ist für $x < 0$ rechtsgekrümmt (konvex) und für $x > 0$ linksgekrümmt (konkav)

Wendepunkt ermitteln

Zweite Ableitung gleich Null setzen:

$f''(x) = 0 \iff 4\underbrace{e^x}_{>0} \cdot (e^x - 1) = 0$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$x^W = 0$

> Erläuterung: *Bedingungen für ein Wendepunkt*
>
> Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

$\Rightarrow G_f$ hat an der Stelle $x^W = 0$ ein Wendepunkt.

$y^W = f(x^W) = f(0) = (e^0 - 2)^2 = -1^2 = 1$

$\Rightarrow W(0|1)$ Wendepunkt

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Zeigen Sie, dass G_f und die durch die Gleichung $y = 4$ gegebene Gerade g genau einen Schnittpunkt $S\ (x_S|y_S)$ besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. [Teilergebnis: $x_S = 2\ln 2$]

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Schnittpunkt zweier Funktionen

$f(x) = (e^x - 2)^2$

$g(x) = 4$

G_f mit G_g schneiden:

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x,y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.
>
> Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$f(x) = g(x) \iff (e^x - 2)^2 = 4$

Variante 1

$(e^x - 2)^2 = 4|$ Klammer auflösen mit binomischer Formel

$(e^x)^2 - 4e^x + 4 = 4| - 4$

$e^{2x} - 4e^x = 0$

$\underbrace{e^x}_{>0} \cdot (e^x - 4) = 0$

$e^x - 4 = 0 | +4$

$e^x = 4 |$ logarithmieren

$\ln e^x = \ln 4$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^x = 4$ angewendet.

$\ln e^x = \ln 4$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x) \qquad$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$x = \ln 4$

$\Rightarrow x_S = \ln 4$

Variante 2

$(e^x - 2)^2 = 4 |$ Wurzel ziehen

$e^x - 2 = \pm 2$

1. Fall:

$e^x - 2 = -2 | +2$

$\underbrace{e^x}_{>0} = 0 \Rightarrow$ keine Lösung

2. Fall:

$e^x - 2 = 2 | +2$

$e^x = 4 \Rightarrow x_S = \ln 4$

Schnittpunkt bestimmen:

$y_S = f(x_S) = f(\ln 4) = (e^{\ln 4} - 2)^2 = (4-2)^2 = 4$

Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*

$\ln s^t = t \cdot \ln s$

$\Rightarrow \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$

$\Rightarrow S(\ln 4|4) = (2\ln 2|4)$ Schnittpunkt

Teilaufgabe 1d (6 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_f. Berechnen Sie $f(-2)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-4 \leq x \leq 1,5$. Tragen Sie auch die Wendetangente und die Gerade g ein.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Wendetangente

Aus Teilaufgabe 1b sind die erste Ableitung f' und der Wendepunkt W bekannt:

$f'(x) = 2(e^x - 2) \cdot e^x$

$W(0|1)$

Wendetangente t im Punkt W bestimmen:

$f(0) = (e^0 - 2)^2 = -1^2 = 1$

$f'(0) = 2(e^0 - 2) \cdot \underbrace{e^0}_{1} = -2$

Erläuterung: *Wendetangente*

Die Gleichung der Tangente t im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ist gegeben durch:

$t: y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$

In diesem Fall ist $x_0 = 0$, $f(0) = 1$ und $f'(0) = -2$

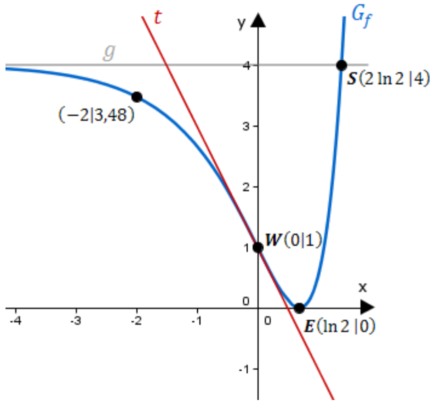
$t: y = (x - 0) \cdot f'(0) + f(0)$

$\Rightarrow t: y = -2x + 1$

Funktionswert berechnen

$f(-2) = (e^{-2} - 2)^2 \approx 3,48$

Skizze



Teilaufgabe 1e (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an G_f in einem Punkt P, der G_f durchläuft. Geben Sie jeweils alle Werte an, die

α) die Steigung der Tangente

β) der y-Achsenabschnitt der Tangente

dabei annimmt.

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Wertebereich bestimmen

α) $[-2; \infty[$

Erläuterung:

Die Steigung m der Tangente an G_f in einem Punkt P ist gegeben durch den Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_P:

$m = f'(x_P)$

Der kleinste Wert, den f' annimmt, ist im Wendepunkt, denn dort hat f' ein Minimum (wie in Teilaufgabe 1b gezeigt wird).

$f'(x^W = 0) = 2e^0(e^0 - 2) = -2$

Weiterhin ist f' für $x > 0$ streng monoton steigend. Somit ist der Wertebereich für die Steigung der Tangente gleich $[-2; +\infty[$

β) $]-\infty; 4[$

Erläuterung:

f ist für $x > \ln 2$ streng monoton steigend. Der y-Achsenabschnitt t der Tangente wird somit immer kleiner: $\lim\limits_{x \to +\infty} t = -\infty$.

Auf der anderen Seite, nähert sich f für $x \to -\infty$ an den Wert $y = 4$. Dort hat sie also eine waagerechte Asymptote.

Somit ist der Wertebereich für den y-Achsenabschnitt gleich $]-\infty; 4[$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Gegeben ist nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $I: x \mapsto \int\limits_{\ln 2}^{x} f(t)\,dt$.

Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von I das Monotonieverhalten von I. Zeigen Sie, dass der Graph von I einen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Monotonieverhalten der Integralfunktion

$$I(x) = \int\limits_{\ln 2}^{x} f(t)\,dt$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

$F_a(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ ist Integralfunktion von $f(x)$, d.h.:

$F_a(a) = 0$
(a ist ist Nullstelle der Integralfunktion, da a Integrationsanfang)

$F_a'(x) = f(x)$
(Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion $f(x)$)

$F_a(x)$ ist stetig wenn es $f(x)$ auch ist.

$$I'(x) = f(x)$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten der Integralfunktion*

Da $f(x)$ stetig ist und $I'(x) = f(x)$, folgt:

Dort wo f negativ ist, ist es I' auch und I ist somit streng monoton fallend.

Dort wo f positiv ist, ist es I' auch und I ist somit streng monoton steigend.

Wo f Nullstellen hat, hat I waagerechte Tangenten (Extrema oder Wendepunkte/Terrassenpunkte)

$$f(x) = \underbrace{(e^x - 2)^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \Rightarrow I(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow I(x)$ ist für $x \in \mathbb{R}$ streng monoton steigend

Krümmungsverhalten der Integralfunktion

$$I(\ln 2) = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 2} f(t)\,dt = 0$$

$$I'(x) = f(x)$$

Erläuterung:

In Teilaufgabe 1a wurde gezeigt, dass f für $x^N = \ln 2$ eine Nullstelle besitzt.

$$f(\ln 2) = 0 \Rightarrow I'(\ln 2) = 0$$

$$I''(x) = f'(x)$$

Erläuterung:

In Teilaufgabe 1b wurde gezeigt, dass f' an der Stelle $x^E = \ln 2$ ein Tiefpunkt besitzt.

$$f'(\ln 2) = 0 \Rightarrow I''(\ln 2) = 0$$

$f''(\ln 2) \neq 0$

Erläuterung: *Terrassenpunkt/Sattelpunkt*

Eine Funktion f hat einen Terrassenpunkt bzw. Sattelpunkt an der Stelle x_0 wenn gilt:

$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad$ und $\; f'''(x_0) \neq 0$

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

$\Rightarrow I(x)$ hat einen Terrassenpunkt $(\ln 2|0)$

Teilaufgabe 2b (2 BE)

Geben Sie ohne weitere Rechnung das Verhalten von I für $x \to -\infty$ an.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$\lim\limits_{x\to-\infty} I(x) = -\infty$

Erläuterung:

Die Integralfunktion $I(x) = \displaystyle\int_{\ln 2}^{x} f(t)\,dt$ gibt für ein bestimmtes x den Wert des Inhaltes der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse zwischen $\ln 2$ und x einschließt.

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 0,5e^{2x} - 4e^x + 4x$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Nachweis einer Stammfunktion

$F(x) = 0,5e^{2x} - 4e^x + 4x$

Erste Ableitung bilden:

$F'(x) = \left(0,5e^{2x} - 4e^x + 4x\right)'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Der Term $0,5e^{2x}$ wird mit der Kettenregel abgeleitet:

$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

$F'(x) = 2 \cdot 0,5e^{2x} - 4e^x + 4$

$F'(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$

$F'(x) = (e^x)^2 - 2 \cdot 2e^x + 2^2$

$F'(x) = (e^x - 2)^2 = f(x)$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\quad F' = f$

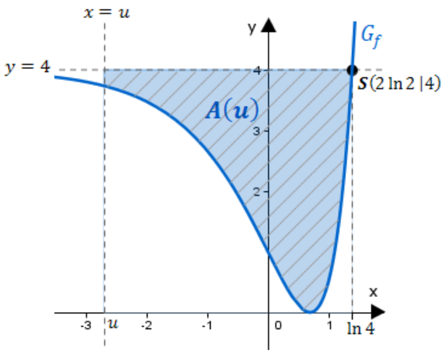
$\Rightarrow F(x)$ ist eine Stammfunktion von f

Teilaufgabe 3b (7 BE)

Der Graph G_f schließt mit den durch die Gleichungen $y = 4$ bzw. $x = u$ $(u < 0)$ bestimmten Geraden im I. und II. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein. Bestimmen Sie $A(u)$.
Ermitteln Sie $\lim\limits_{u\to-\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



$f(x) = (e^x - 2)^2$

$F(x) = 0,5e^{2x} - 4e^x + 4x$ ist Stammfunktion von $f(x)$ (siehe Teilaufgabe 3a)

$y = 4$

$S(2\ln 2|4)$ ist der Schnittpunkt von G_f mit der Geraden $y = 4$ (siehe Teilaufgabe 1c)

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der Geraden $y = 4$ einschließt ist gleich der Fläche, die die Gerade $y = 4$ mit der x-Achse einschließt minus die Fläche die G_f mit der x-Achse einschließt.

Man berechnet also das bestimmte Integral von $4 - f(x)$.

Die Integrationsgrenzen sind u (da $x = u$ die Fläche im II. Quadranten begrenzt) und $2\ln 2$, die x-Koordinate des Schnittpunktes S zwischen G_f und $y = 4$.
Um die späteren Rechnungen zu erleichtern wird $2\ln 2$ als $\ln 4$ geschrieben.

$$A(u) = \int_u^{\ln 4} [4 - f(x)] \, dx$$

Erläuterung: *Integral einer Summe*

Für das Integral einer Summe gilt:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$A(u) = \int_u^{\ln 4} 4\,dx - \int_u^{\ln 4} f(x)dx$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In diesem Fall ist $4x$ eine Stammfunktion von 4 und $F(x) = 0,5e^{2x} - 4e^x + 4x$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$A(u) = [4x]_u^{\ln 4} - \left[0,5e^{2x} - 4e^x + 4x\right]_u^{\ln 4}$$

$$A(u) = (4\ln 4 - 4u) - \left(0,5\underbrace{e^{2\ln 4}}_{16} - 4\underbrace{e^{\ln 4}}_{4} + 4\ln 4 - 0,5e^{2u} + 4e^u - 4u\right)$$

$$A(u) = 4\ln 4 - 4u - 8 + 16 - 4\ln 4 + 0,5e^{2u} - 4e^u + 4u$$

$$\Rightarrow A(u) = 0,5e^{2u} - 4e^u + 8$$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{u\to-\infty} A(u) = \lim_{u\to-\infty} 0,5\underbrace{e^{2u}}_{\to 0} - 4\underbrace{e^u}_{\to 0} + 8 = 8$$

Geometrische Interpretation:

Die Fläche die G_f mit der Geraden $y = 4$ zwischen $-\infty$ und $\ln 4$ einschließt, hat endlichen Inhalt.